

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE DE LA MAÎTRISE EN  
MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE APPLIQUÉES

PAR  
ETIENNE MARTINEAU

BORNES DE LA DISTANCE À L'ENSEMBLE DE MANDELBROT  
GÉNÉRALISÉ

DÉCEMBRE 2004

CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ  
PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. Dominic Rochon, directeur de mémoire  
Département de mathématiques et d'informatique

M. Sébastien Tremblay, juré  
Département de mathématiques et d'informatique

M. Michel Grundland, juré  
Département de mathématiques et d'informatique

## SOMMAIRE

Ce document présente des formules pour borner la distance aux ensembles de Julia et de Mandelbrot généralisés pour les nombres bicomplexes. Ces formules sont utilisées pour visualiser des coupes de ces ensembles dans l'espace tridimensionnel à l'aide d'une méthode de *ray-tracing*. De plus, ce document présente une méthode inédite d'exploration des coupes qui permet d'agrandir indéfiniment les zones d'intérêt.

Grâce aux récents progrès en analyse bicomplexe, il est maintenant possible de définir de façon analytique ces formules qui ont de multiples applications. En effet, dans les pages qui suivent, elles seront utilisées dans une méthode de ray-tracing dans l'exploration et l'ombrage des fractales.

Comme le lecteur pourra le constater, les images générées à l'aide de ces résultats sont d'une très grande beauté. De plus, la complexité de ces fractales justifie le développement d'une méthode d'exploration. Nous mettrons l'accent sur les images du *Tétrabrot* (Fig. 1) car sa structure fractale est très riche.

La théorie présentée ici est développée dans le contexte des nombres bicomplexes, mais peut être appliquée à d'autres types de nombres ou de fractales. Par exemple: les quaternions, les nombres de Cayley et certaines fractales possédant une fonction de potentiel.

## ABSTRACT

In this document, we present some distance estimation formulas that can be applied both to bicomplex Mandelbrot sets and as well as bicomplex Julia sets. These formulas are used to ray trace slices of above mentioned sets in three dimensional space. Moreover, we will also present a hitherto unpublished method to explore and infinitely approach above mentioned 3D fractals.

With recent progress in bicomplex analysis, it is now possible to give rigorous proof of these formulas which have multiple uses. In the following pages they will be used in a ray tracing method, in exploration and shading of fractals.

The reader will notice that the images generated with these results are incredibly beautiful. Moreover, the complexity of these fractals justifies the creation of an exploration method. We will put emphasis on the generalized Mandelbrot set for bicomplex numbers in three dimensional space, and more specifically the Tétrabrot (Fig. 1) because of its rich fractal structure and symmetry.

The theory presented here was developed with bicomplex numbers but can also be applied to other types of numbers or fractals, including Quaternions, Cayley numbers and some fractals with potential function.

## AVANT-PROPOS

C'est en décembre 2002, durant mon dernier cours d'analyse complexe que ma maîtrise a non-officiellement commencé. Mon professeur, Dominic Rochon, présenta un aperçu de son domaine de recherche. C'est lorsqu'il montra les images du *Tétrabrot* (Fig. 1) qu'il piqua ma curiosité; d'abord par la beauté des images mais aussi par le temps nécessaire pour calculer chacune d'elles: 48 heures! Je lui ai proposé mon aide pour optimiser le processus. Il m'a plutôt suggéré de développer une toute nouvelle méthode dans le cadre d'une maîtrise.

Après de multiples embûches et incertitudes, découlent de cette aventure: le mémoire que vous lisez présentement, un article qui paraîtra dans "l'International Journal of Bifurcation and Chaos", une conférence dans les montagnes américaines, un logiciel qui prend sans cesse de l'expansion, un DVD avec de la musique techno et une multitudes d'images et de films.

Toutes ces réalisations n'auraient pu voir le jour sans l'aide de plusieurs personnes que je dois remercier. Merci à mon directeur, Dr. Dominic Rochon, pour ses idées, sa rigueur et sa détermination. Merci à ma femme, Chantale, pour son amour et son support tant moral que technique. Merci à toute ma famille et mes amis pour les raisons d'usage. Merci à la société d'avoir fait ce que je suis, car en réalité, nous ne décidons de rien.

# Table des matières

Table des matières	iv
Liste des figures	vii
Liste des symboles	viii
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2 Revue de littérature</b>	<b>3</b>
2.1 Les nombres bicomplexes . . . . .	3
2.2 Les bornes de distance . . . . .	4
2.3 Visualisation de fractales tridimensionnelles . . . . .	4
<b>3 Les nombres bicomplexes</b>	<b>5</b>
3.0.1 L'ensemble $\mathbb{C}$ . . . . .	5
3.0.2 L'ensemble $\mathbb{T}$ . . . . .	6
3.0.3 Propriétés de $\mathbb{T}$ . . . . .	7
3.1 Autres représentations des nombres bicomplexes . . . . .	8
3.1.1 L'unité hyperbolique . . . . .	8
3.1.2 La représentation idempotente . . . . .	10
3.2 Les conjugués bicomplexes . . . . .	11

3.3	Les différents modules de $\mathbb{T}$ . . . . .	14
3.3.1	Nombres bicomplexes inversibles . . . . .	17
3.4	Propriétés des modules . . . . .	19
3.4.1	Module réel . . . . .	19
3.4.2	$\mathbf{i}_1$ -module . . . . .	22
3.4.3	$\mathbf{i}_2$ -module . . . . .	25
3.4.4	$\mathbf{j}$ -module . . . . .	26
3.5	Résultats avancés . . . . .	27
3.5.1	Exponentielle et logarithme bicomplexe . . . . .	28
3.5.2	Notions de différentiabilité bicomplexe . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Bornes de la distance à l'ensemble de Mandelbrot</b>	<b>33</b>
4.1	Potentiel et distance . . . . .	34
4.2	Borne supérieure aux ensembles de Julia remplis . . . . .	35
4.2.1	Lemme de Schwarz . . . . .	35
4.2.2	Borne supérieure . . . . .	39
4.3	Borne inférieure aux ensembles de Julia remplis . . . . .	42
4.3.1	Théorème $\frac{1}{4}$ de Koebe . . . . .	42
4.3.2	Borne inférieure . . . . .	49
4.4	Bornes à l'ensemble de Mandelbrot . . . . .	51
4.5	Estimation des bornes aux ensembles de Julia remplis . . . . .	53
4.6	Estimation des bornes à l'ensemble de Mandelbrot . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Bornes de la distance à l'ensemble de Mandelbrot généralisé</b>	<b>56</b>
5.1	Préliminaire . . . . .	57
5.2	Bornes de distance aux ensembles de Julia remplis généralisés . . . . .	61
5.3	Bornes de la distance à l'ensemble de Mandelbrot généralisé . . . . .	65

<b>6</b>	<b>Ray-Tracing pour les fractales bicomplexes</b>	<b>68</b>
6.1	Introduction . . . . .	68
6.2	Problématique . . . . .	69
6.3	Ray-Tracing pour les ensembles de Julia remplis bicomplexes . . . . .	70
6.4	Ray-Tracing pour les coupes de $\mathcal{M}_2$ dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .	72
6.5	Effets visuels . . . . .	73
6.6	Optimisation . . . . .	75
6.7	Exploration . . . . .	76
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>78</b>
7.1	Résumé . . . . .	78
7.2	Conclusion . . . . .	79
	<b>Annexe A</b>	<b>80</b>
	<b>Annexe B</b>	<b>83</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>86</b>



# Liste des figures

1	Le <i>Tétrabrot</i> . . . . .	89
2	Le dessous du <i>Tétrabrot</i> . . . . .	89
3	Le dessus du <i>Tétrabrot</i> vu en contre-plongée . . . . .	89
4	Coupe de l'ensemble de Mandelbrot généralisé . . . . .	89
5	Le dessus du <i>Tétrabrot</i> vu en plongée . . . . .	90
6	Profondément à l'intérieur d'une zone fractale . . . . .	90
7	Coupe d'un ensemble de Julia remplis bicomplexe . . . . .	90

# Liste des symboles

$\mathbb{T}$	L'ensemble des nombres bicomplexes
$\mathbb{D}$	L'ensemble des nombres hyperboliques
$\mathcal{M}$	L'ensemble de Mandelbrot
$\mathcal{M}_2$	L'ensemble de Mandelbrot généralisé
$\mathcal{K}_c$	L'ensemble de Julia rempli associé à $c \in \mathbb{C}$
$\mathcal{K}_{2,c}$	L'ensemble de Julia rempli généralisé associé à $c \in \mathbb{T}$
$\mathcal{T}$	Le <i>Tétrabrot</i>
$G$	Potentiel électrostatique
$\phi_c$	Application de $\mathcal{K}_c$ vers le disque unité
$\psi$	Application de $\mathcal{M}$ vers le disque unité
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$	Représentation idempotente
$\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$	Unité imaginaire
$\mathbf{j}$	Unité hyperbolique
$D_i$	Borne inférieure de la distance à $\mathcal{K}_{2,c}$
$\hat{D}_i$	Estimateur de $D_i$
$TH$	Classe des applications $\mathbb{T}$ -holomorphes

# Chapitre 1

## Introduction

La dynamique complexe a été un domaine en pleine expansion durant les dernières années. Ce n'est pas un hasard si la même situation soit arrivée simultanément dans le domaine de l'informatique; la capacité de calcul des ordinateurs a permis d'observer plusieurs phénomènes de dynamique qui seraient, en d'autres circonstances, passés inaperçus. C'est grâce aux images de la dynamique complexe générées par ordinateur que les fractales sont véritablement nées. La représentation de l'ensemble de Mandelbrot et des ensembles de Julia a eu pour effet de populariser les nombres et la dynamique complexes. En effet, il suffit d'une recherche sur Internet pour constater que beaucoup de profanes ont conçu des logiciels pour explorer ces ensembles. En réalité, c'est la beauté des images qui a poussé la plupart des gens, du profane au chercheur, à s'intéresser à cette branche des mathématiques.

C'est un peu le but recherché avec la visualisation des fractales bicomplexes. Ce type de nombre gagne tranquillement en popularité et on le considère même comme la généralisation naturelle des nombres complexes. Les fractales bicomplexes sont des structures quadri-dimensionnelles d'une beauté incroyable. Par contre, à l'ins-

tar de leurs analogues complexes, ils sont difficiles à visualiser et encore plus à explorer.

Ce document présente des formules pour borner la distance aux fractales bicomplexes qui seront utilisées pour générer des images à l'aide d'un algorithme spécial de ray-tracing. Ces formules seront aussi utilisées dans une méthode d'exploration inédite qui permet d'agrandir indéfiniment les parties intéressantes des fractales. Ces nouveaux résultats seront présentés dans les chapitres 5 et 6.

Dans les pages qui suivent, le lecteur pourra s'initier aux nombres bicomplexes. Il pourra également suivre la démarche rigoureuse qui mène au résultat principal: les formules pour borner la distance aux fractales bicomplexes. La méthode analytique sera utilisée pour ne laisser aucun doute sur la validité des résultats. Tous les détails des preuves seront présentés et aucun aspect mathématique ne sera négligé. Ce document peut être lu sans aucune autre référence par un étudiant gradué en mathématiques et de plus, les résultats sont directement applicables dans une implémentation logicielle.

Une introduction aux nombres bicomplexes débutera l'exposé pour faire comprendre les résultats élémentaires nécessaires à leur utilisation. Par la suite, le développement rigoureux des formules de distance pour les nombres complexes sera présenté. L'adaptation de ces formules aux cas bicomplexes sera développée de façon analytique. Finalement, nous verrons comment utiliser ces résultats pour générer et explorer les fractales bicomplexes à l'aide du ray-tracing. Tout au long de ce document, nous assumerons que le lecteur est familier avec l'analyse complexe et, pour la dernière partie, avec le ray-tracing.

# Chapitre 2

## Revue de littérature

Les résultats présentés dans ce mémoire seront publiés dans “l’International Journal of Bifurcation and Chaos” [11]. Par contre, Cet article ne fournit aucun préliminaire sur le sujet et s’adresse aux lecteurs familiers avec celui-ci.

### 2.1 Les nombres bicomplexes

La théorie des nombres bicomplexes est un domaine qui s’est développé tout récemment. Les références sur le sujet sont rares mais il est tout de même possible de souligner des références majeures. En 1892, lorsqu’il cherchait de nouvelles algèbres, Corrado Segre (1860-1924) publia un article [24] dans lequel il traite d’une famille infinie d’algèbres qu’il nomme bicomplexe, tricomplexe ... n-complexe. Le développement analytique de la théorie des nombres bicomplexes se trouve, entre autre, dans [16], [17], [19] et [23].

## 2.2 Les bornes de distance

L'estimation de la distance se base sur un résultat majeur de Hubbard et Douady [5]. Grâce à ce résultat, à l'analyse complexe et à la théorie des fonctions univalentes [6], il est possible de borner la distance aux ensembles de Mandelbrot et Julia connexes. L'estimation des bornes de la distance à ces ensembles est abordée brièvement dans [13]. Par contre, aucune preuve rigoureuse n'est fournie. Une preuve plus complète est fournie dans [4], mais encore une fois, plusieurs détails importants sont laissés de côté. Il existe aussi des bornes analogues pour les ensembles de Julia quaternioniques dans [4] et [9].

## 2.3 Visualisation de fractales tridimensionnelles

La visualisation de fractales en trois dimensions fut d'abord abordée par Norton [12] qui donna un algorithme simple. Pour la première fois, il fut possible d'observer le processus d'itération avec les quaternions. Dans [18], l'algorithme d'échappement fut utilisé pour créer les premières images du *Tétrabrot* (Fig. 1): la généralisation de l'ensemble de Mandelbrot pour les nombres bicomplexes. Par contre, cette méthode est peu efficace car sa complexité est élevée.

Grâce au ray-tracing, les images sont générées de la même façon que l'oeil humain les perçoit. La théorie de cette méthode est documentée dans plusieurs livres de graphisme par ordinateur. Par contre, le ray-tracing se base sur la possibilité d'établir le point d'intersection entre un rayon et une surface, ce qui est impossible quand la surface est fractale. Ce problème est surmonté dans [4] et [9] pour la visualisation de fractales quaternioniques.

# Chapitre 3

## Les nombres bicomplexes

Les nombres bicomplexes sont peu connus, c'est pourquoi nous en présentons la base dans cette section. Le but, ici, est d'informer le lecteur de la mécanique de ce type de nombre en présentant quelques résultats. Le matériel qui suit dépasse ce qui est nécessaire pour pouvoir prouver les résultats majeurs de ce document. Ceci est voulu, l'objectif est de fournir le plus d'information possible au lecteur sur ce type de nombre.

### 3.0.1 L'ensemble $\mathbb{C}$

Nous assumerons que le lecteur est familier avec la théorie des nombres réels et complexes. En particulier, nous supposerons que le lecteur peut voir l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$ , comme étant une algèbre engendrée par l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$ , et l'élément non-réel  $\mathbf{i}$  dont la propriété principale est:  $\mathbf{i}^2 = -1$ . Ce qui signifie en bref que:

$$\mathbb{C} := \{x + \mathbf{i}y \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

De ce fait, nous pouvons considérer l'ensemble  $\mathbb{C}$  comme une “duplication” des nombres réels.

### 3.0.2 L'ensemble $\mathbb{T}$

Nous allons maintenant répéter ce processus de duplication en utilisant l'ensemble des nombres complexes. Définissons la partie imaginaire dans  $\mathbb{C}$  par  $\mathbf{i}_1$  ce qui donne  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1) := \{x + y\mathbf{i}_1 \mid \mathbf{i}_1^2 = -1 \text{ et } x, y \in \mathbb{R}\}$ .

Définissons également une seconde partie imaginaire distincte,  $\mathbf{i}_2$ , possédant les propriétés suivantes:

$$\mathbf{i}_2^2 = -1; \quad \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_2\mathbf{i}_1; \quad \alpha\mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_2\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ce qui signifie que la multiplication entre  $\mathbf{i}_1$  et  $\mathbf{i}_2$  est commutative. Nous pouvons étendre cette propriété à l'ensemble

$$\mathbb{T} := \mathbb{C}_2 := \{z_1 + z_2\mathbf{i}_2 \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)\}$$

et ajouter la distributivité et l'associativité à cette même multiplication par la règle suivante:

$$(z_1 + z_2\mathbf{i}_2)(z_3 + z_4\mathbf{i}_2) := (z_1z_3 - z_2z_4) + (z_1z_4 + z_2z_3)\mathbf{i}_2.$$

Nous présentons formellement cette définition mais notons qu'elle est le résultat de manipulations algébriques, tout comme les règles suivantes:

$$z_1 + z_2\mathbf{i}_2 = z_3 + z_4\mathbf{i}_2 \iff z_1 = z_3 \text{ et } z_2 = z_4,$$

$$(z_1 + z_2\mathbf{i}_2) + (z_3 + z_4\mathbf{i}_2) := (z_1 + z_3) + (z_2 + z_4)\mathbf{i}_2.$$



Nous appellerons les éléments de l'ensemble  $\mathbb{C}_2 = \mathbb{T}$  *nombres bicomplexes* pour des raisons évidentes. Les zéros 0 “réels” et “complexes” sont définis comme étant le “zéro bicomplexe”  $0 + 0\mathbf{i}_2$ , tout comme les unités 1 “réelles” et “complexes” sont “l’unité bicomplexe”  $1 + 0\mathbf{i}_2$ .

### 3.0.3 Propriétés de $\mathbb{T}$

Il est facile de démontrer qu’à l’aide de ces opérations,  $\mathbb{T}$  est un anneau commutatif avec unité. En identifiant  $\mathbb{R}$  comme

$$\{z_1 + z_2\mathbf{i}_2 \mid z_2 = 0, z_1 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{T},$$

nous constatons que  $\mathbb{R}$  est un sous-anneau de  $\mathbb{T}$ . Une façon évidente d’inclure  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{T}$  est de l’identifier comme l’ensemble

$$\mathbb{C}(\mathbf{i}_1) := \{z_1 + 0\mathbf{i}_2\} \subset \mathbb{T},$$

qui fait de  $\mathbb{C}$  un sous-anneau de  $\mathbb{T}$ . Il est à noter qu’il existe une autre façon d’inclure  $\mathbb{C}$  en le définissant comme

$$\mathbb{C}(\mathbf{i}_2) := \{z_1 + z_2\mathbf{i}_2 \mid z_1, z_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Ces deux représentations,  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  et  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_2)$ , sont isomorphiques à  $\mathbb{C}$  mais sont différentes à l’intérieur de  $\mathbb{T}$ . Il existe d’autres sous-ensembles intéressants dans  $\mathbb{T}$  qui seront introduits plus tard.

Finalement, en introduisant l’ensemble  $\mathbb{T} = \mathbb{C}_2$  nous convertissons l’espace complexe linéaire

$$\mathbb{C}^2 := \{(z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

en une algèbre complexe commutative.

## 3.1 Autres représentations des nombres bicomplexes

### 3.1.1 L'unité hyperbolique

Les nombres bicomplexes ont été introduits comme étant une paire de nombres complexes standards avec une structure additive et une multiplication commutative. Soit  $w = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2$ , écrivons les nombres complexes  $z_1$  et  $z_2$  comme  $z_1 = w_1 + w_2 \mathbf{i}_1$ ,  $z_2 = w_3 + w_4 \mathbf{i}_1$ , avec  $w_1, w_2, w_3, w_4$  réels; alors  $w = w_1 + w_2 \mathbf{i}_1 + w_3 \mathbf{i}_2 + w_4 \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2$ . Posons

$$\mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 =: \mathbf{j}.$$

Ce nombre bicomplexe possède les propriétés suivantes qui découlent directement de la définition:

$$\mathbf{i}_2 \mathbf{j} = \mathbf{j} \mathbf{i}_2 = -\mathbf{i}_1, \quad \mathbf{i}_1 \mathbf{j} = \mathbf{j} \mathbf{i}_1 = -\mathbf{i}_2, \quad \mathbf{j}^2 = \mathbf{i}_0 = 1.$$

En considérant que  $\mathbf{i}_1$  et  $\mathbf{i}_2$  portent le nom d'unités imaginaires, nous appellerons  $\mathbf{j}$  l'unité *hyperbolique*. En particulier, l'ensemble

$$\mathbb{D} := \{z_1 + z_2 \mathbf{j} \mid z_1, z_2 \in \mathbb{R}\}$$

sera nommé l'ensemble des nombres hyperboliques (aussi appelé nombres duplexes).

Grâce à cette nouvelle définition, l'ensemble  $\mathbb{T}$  peut être vu comme:

$$\mathbb{T} := \{w_1 \mathbf{i}_0 + w_2 \mathbf{i}_1 + w_3 \mathbf{i}_2 + w_4 \mathbf{j} \mid w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Si  $w_3 = w_4 = 0$ , le nombre bicomplexe  $w = w_1 \mathbf{i}_0 + w_2 \mathbf{i}_1 + 0 \mathbf{i}_2 + 0 \mathbf{j}$  est identifié par le nombre complexe  $w_1 + w_2 \mathbf{i}_1$  et si  $w_2 = w_4 = 0$  alors le nombre bicomplexe

$w = w_1\mathbf{i}_0 + 0\mathbf{i}_1 + w_3\mathbf{i}_2 + 0\mathbf{j}$  est identifié par le nombre complexe  $w_1 + w_3\mathbf{i}_2$ . Le nombre bicomplexe  $w = w_1\mathbf{i}_0 + 0\mathbf{i}_1 + 0\mathbf{i}_2 + 0\mathbf{j}$  est identifié par le nombre réel  $w_1$  et sous cette notation, nous constatons que  $\mathbb{R}$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{T}$ .

La table de Cayley pour l'ensemble  $\mathbb{T}$  prend la forme:

	$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{j}$
$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{j}$
$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}_2$
$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}_0$	$-\mathbf{i}_1$
$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_0$

i.e.,  $\mathbf{i}_0 := 1$  joue le rôle de l'identité, et

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 &= \mathbf{i}_2\mathbf{i}_1 = \mathbf{j}, \\ \mathbf{i}_1\mathbf{j} &= \mathbf{j}\mathbf{i}_1 = -\mathbf{i}_2, \\ \mathbf{i}_2\mathbf{j} &= \mathbf{j}\mathbf{i}_2 = -\mathbf{i}_1, \\ \mathbf{i}_1^2 &= \mathbf{i}_2^2 = -\mathbf{i}_0, \\ \mathbf{j}^2 &= \mathbf{i}_0.\end{aligned}$$

Cette approche dote l'espace vectoriel quadri-dimensionnel  $\mathbb{R}^4$  d'une base canonique

$$\mathbf{i}_0 = (1,0,0,0), \mathbf{i}_1 = (0,1,0,0), \mathbf{i}_2 = (0,0,1,0), \mathbf{j} = (0,0,0,1),$$

avec les opérations arithmétiques suivantes si  $s = s_1 \cdot 1 + s_2\mathbf{i}_1 + s_3\mathbf{i}_2 + s_4\mathbf{j}$  et  $t = t_1 \cdot 1 + t_2\mathbf{i}_1 + t_3\mathbf{i}_2 + t_4\mathbf{j}$  alors

$$\begin{aligned}
s + t &:= (s_1 + t_1) \cdot 1 + (s_2 + t_2)\mathbf{i}_1 + (s_3 + t_3)\mathbf{i}_2 + (s_4 + t_4)\mathbf{j}; \\
s \cdot t &:= (s_1 t_1 - s_2 t_2 - s_3 t_3 + s_4 t_4) \\
&\quad + (s_1 t_2 + s_2 t_1 - s_3 t_4 - s_4 t_3)\mathbf{i}_1 \\
&\quad + (s_1 t_3 - s_2 t_4 + s_3 t_1 - s_4 t_2)\mathbf{i}_2 \\
&\quad + (s_1 t_4 + s_2 t_3 + s_3 t_2 + s_4 t_1)\mathbf{j}.
\end{aligned}$$

Ce qui fait de  $\mathbb{T}$ , comme mentionné plus tôt, un anneau commutatif avec unité et diviseur de zéro.

### 3.1.2 La représentation idempotente

Soit les deux nombres bicomplexes suivants

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1 + \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2}{2}; \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1 - \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2}{2};$$

qui possèdent les propriétés suivantes:

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_1; \quad \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_2; \quad \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 = 0; \quad \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = 1.$$

Ceci signifie que  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  sont idempotents (parfois nommé orthogonal idempotent en raison de la dernière propriété). Ils nous permettent d'obtenir la décomposition suivante de l'ensemble  $\mathbb{T}$ :  $\forall (z_1 + z_2 \mathbf{i}_2) \in \mathbb{T}$  où  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$

$$z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 = (z_1 - z_2 \mathbf{i}_2)\mathbf{e}_1 + (z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)\mathbf{e}_2.$$

Les propriétés de  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  nous assurent que la décomposition est unique, par conséquent, les deux applications

$$P_1 : z_1 + z_2\mathbf{i}_2 \mapsto (z_1 - z_2\mathbf{i}_1),$$

$$P_2 : z_1 + z_2\mathbf{i}_2 \mapsto (z_1 + z_2\mathbf{i}_1),$$

définissent une paire de projections mutuellement complémentaires

$$[P_1\mathbf{e}_1]^2 = P_1\mathbf{e}_1, \quad [P_2\mathbf{e}_2]^2 = P_2\mathbf{e}_2,$$

$$P_1\mathbf{e}_1 + P_2\mathbf{e}_2 = Id,$$

$Id$  étant l'opérateur d'identité. Elles possèdent plusieurs propriétés remarquables.

En posant  $u, v \in \mathbb{T}$ ,

$$P_1(u + v) = P_1(u) + P_1(v),$$

$$P_2(u + v) = P_2(u) + P_2(v),$$

$$P_1(u \cdot v) = P_1(u) \cdot P_1(v),$$

$$P_2(u \cdot v) = P_2(u) \cdot P_2(v).$$

Ces propriétés donnent l'opportunité de réduire certaines opérations à des opérations de composantes à composantes que nous utiliserons à plusieurs reprises dans ce qui suit.

## 3.2 Les conjugués bicomplexes

Le conjugué complexe joue un rôle très important en algèbre, dans les propriétés géométriques de  $\mathbb{C}$  et en analyse des fonctions complexes. Nous constatons qu'il

existe trois conjugués dans  $\mathbb{T}$ , ce qui n'est pas surprenant. En fait, le conjugué complexe est défini en totalité par son action sur la partie imaginaire. Alors, nous pouvons facilement concevoir qu'il en existe deux pour  $\mathbb{T}$ , en plus d'un supplémentaire pour leur interaction. Nous allons maintenant considérer ces faits dans les détails.

**Définition 3.2.1 (conjugué associé à  $\mathbf{i}_1$  ou 1<sup>e</sup> conjugué)** *Nous le définirons par la formule*

$$(z_1 + z_2 \mathbf{i}_2)^{\dagger 1} := \overline{z_1} + \overline{z_2} \mathbf{i}_2$$

pour tout  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  où  $\overline{z_1}, \overline{z_2}$  sont les conjugués complexes des nombres complexes  $z_1, z_2$ .

**Proposition 3.2.2 (propriétés du conjugué associé à  $\mathbf{i}_1$ )** *Le conjugué possède les propriétés suivantes:*

- a)  $(s + t)^{\dagger 1} = s^{\dagger 1} + t^{\dagger 1}, \forall s, t \in \mathbb{T}$ .
- b)  $(s - t)^{\dagger 1} = s^{\dagger 1} - t^{\dagger 1}, \forall s, t \in \mathbb{T}$ .
- c)  $(w^{\dagger 1})^{\dagger 1} = w, \forall w \in \mathbb{T}$ .
- d)  $(s \cdot t)^{\dagger 1} = s^{\dagger 1} \cdot t^{\dagger 1}, \forall s, t \in \mathbb{T}$ .

**Définition 3.2.3 (conjugué associé à  $\mathbf{i}_2$ ; ou 2<sup>e</sup> conjugué)** *Nous le définirons par la formule*

$$(z_1 + z_2 \mathbf{i}_2)^{\dagger 2} = z_1 - z_2 \mathbf{i}_2, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$$

**Proposition 3.2.4 (propriétés du conjugué associé à  $\mathbf{i}_2$ )** *Le conjugué possède les propriétés suivantes:*

- a)  $(s + t)^{\dagger 2} = s^{\dagger 2} + t^{\dagger 2} \quad \forall s, t \in \mathbb{T}$ .
- b)  $(s - t)^{\dagger 2} = s^{\dagger 2} - t^{\dagger 2} \quad \forall s, t \in \mathbb{T}$ .
- c)  $(w^{\dagger 2})^{\dagger 2} = w \quad \forall w \in \mathbb{T}$ .

$$\text{d) } (s \cdot t)^{\dagger 2} = s^{\dagger 2} \cdot t^{\dagger 2} \quad \forall s, t \in \mathbb{T}.$$

**Définition 3.2.5 (conjugué combiné ou 3<sup>e</sup> conjugué)** *Par la composition des deux conjugaisons précédentes, nous le définirons par la formule*

$$(z_1 + z_2 \mathbf{i}_2)^{\dagger 3} := (z_1 + z_2 \mathbf{i}_2^{\dagger 2})^{\dagger 1} = (z_1 + z_2 \mathbf{i}_2^{\dagger 1})^{\dagger 2} = \overline{z_1} - \overline{z_2} \mathbf{i}_2.$$

**Proposition 3.2.6 (propriétés du conjugué combiné)** *Pour tous  $s, t$ , et  $w \in \mathbb{T}$ :*

$$\text{a) } (s + t)^{\dagger 3} = s^{\dagger 3} + t^{\dagger 3} \quad \forall s, t \in \mathbb{T}.$$

$$\text{b) } (s - t)^{\dagger 3} = s^{\dagger 3} - t^{\dagger 3} \quad \forall s, t \in \mathbb{T}.$$

$$\text{b) } (w^{\dagger 3})^{\dagger 3} = w \quad \forall w \in \mathbb{T}.$$

$$\text{d) } (s \cdot t)^{\dagger 3} = s^{\dagger 3} \cdot t^{\dagger 3} \quad \forall s, t \in \mathbb{T}.$$

Sur les sous-ensembles  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  et  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_2)$  de  $\mathbb{T}$ , la troisième conjugaison agit comme la conjugaison complexe sur les copies de l'ensemble  $\mathbb{C}$ ; Soit  $w_1 = z_1 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ , alors

$$\begin{aligned} w_1^{\dagger 3} &= (z_1 + 0\mathbf{i}_2)^{\dagger 3} \\ &= \overline{z_1} - \overline{0}\mathbf{i}_2 \\ &= \overline{z_1}; \end{aligned}$$

de façon similaire, soit  $w_2 = x + y\mathbf{i}_2$  avec  $x, y \in \mathbb{R}$ , alors

$$\begin{aligned} w_2^{\dagger 3} &= (x + y\mathbf{i}_2)^{\dagger 3} \\ &= x - y\mathbf{i}_2 \\ &= \overline{x + y\mathbf{i}_2}. \end{aligned}$$

Évidemment, nous abusons légèrement en notant avec le même symbole “ $-$ ” deux opérations strictement différentes qui agissent soit sur  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  soit sur  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_2)$ .

Nous croyons que ceci ne pose aucune confusion et nous continuerons de noter par  $\bar{z}$  la conjugaison dans n'importe quel ensemble  $\mathbb{C}(\mathbf{k}) := \{x + \mathbf{k}y \mid x, y \in \mathbb{R}\}$  avec  $\mathbf{k}^2 = \pm 1$ : Si  $z \in \mathbb{C}(\mathbf{k})$  alors  $\bar{z} := x - \mathbf{k}y$ . Notons que  $(x + y\mathbf{j})^{\dagger 3} = x + y\mathbf{j} \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

Il est important de mentionner que même si les ensembles  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  et  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_2)$  paraissent absolument équivalents à l'intérieur de  $\mathbb{T}$ , la définition des conjugaisons reflète certaines asymétries entre eux. En effet, la définition 3.2.1 prend  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  comme l'ensemble sous-jacent et étend la conjugaison complexe sur l'ensemble  $\mathbb{C}^2$  représenté par  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1) \times \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ , sans affecter la structure additive générée par  $\mathbf{i}_2$ . Ce type de conjugaison est celui considéré dans la théorie des fonctions classiques sur  $\mathbb{C}^2$  (dans ce cas, la conjugaison est composante par composante). En contraste, la deuxième conjugaison  $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mapsto (z_1, -z_2)$  engendrée par  $\mathbf{i}_2$ , serait plus difficile à percevoir de l'intérieur de l'approche classique de  $\mathbb{C}^2$ .

### 3.3 Les différents modules de $\mathbb{T}$

Pour un nombre complexe, le produit avec son conjugué donne le carré de la métrique euclidienne dans  $\mathbb{R}^2$ . Maintenant, considérons le résultat analogue pour les nombres bicomplexes. Nous avons pour  $w = z_1 + z_2\mathbf{i}_2$  où  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ :

$$w \cdot w^{\dagger 2} = z_1^2 + z_2^2, \quad (3.1)$$

$$w \cdot w^{\dagger 1} = (|z_1|^2 - |z_2|^2) + 2\text{Re}(z_1\bar{z}_2)\mathbf{i}_2, \quad (3.2)$$

$$w \cdot w^{\dagger 3} = (|z_1|^2 + |z_2|^2) - 2\text{Im}(z_1\bar{z}_2)\mathbf{j}. \quad (3.3)$$

L'égalité (3.1) joue le rôle de l'égalité  $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$  pour les nombres complexes avec la forme  $z_1^2 + z_2^2$  à valeur complexe qui substitue la norme euclidienne du plan complexe  $\mathbb{C}$ . Notons que la partie réelle dans (3.3) est la norme euclidienne



dans  $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{T} = \mathbb{C}_2$  et la partie réelle dans (3.2) fait référence à la structure hyperbolique. De plus,  $w \cdot w^{\dagger 2} \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ ,  $w \cdot w^{\dagger 1} \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_2)$  et  $w \cdot w^{\dagger 3} \in \mathbb{D}$ . Ceci nous amène les définitions suivantes.

**Définition 3.3.1** *En prenant le nombre bicomplexe  $w = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2$  avec*

*$z_1, z_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ , alors*

**a)** *le nombre réel*

$$|w| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}$$

*sera référencé comme le module réel de  $w = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2$ ;*

**b)** *le nombre complexe dans  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$*

$$|w|_{\mathbf{i}_1} := \begin{cases} |w|_c = \sqrt{z_1^2 + z_2^2} & \text{si } w = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2, \\ |w|_h = \sqrt{\zeta_1^2 - \zeta_2^2} & \text{si } w = \zeta_1 + \zeta_2 \mathbf{j}, \end{cases}$$

*où  $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ , sera référencé comme le  $\mathbf{i}_1$ -module. Dépendant de la façon d'exprimer  $w$ ,  $|w|_{\mathbf{i}_1} = |w|_c$  (appelé le  $\mathbf{i}_1$ -module complexe) ou  $|w|_{\mathbf{i}_1} = |w|_h$  (appelé le module hyperbolique).*

**c)** *le nombre complexe dans  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_2)$*

$$|w|_{\mathbf{i}_2} := \sqrt{(|z_1|^2 - |z_2|^2) + 2\text{Re}(z_1 \bar{z}_2) \mathbf{i}_2},$$

*sera référencé comme le  $\mathbf{i}_2$ -module de  $w = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2$ . En particulier,*

$$|w|_{\mathbf{i}_2} = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \quad \text{si } w = \gamma_1 + \gamma_2 \mathbf{i}_1$$

*où  $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_2)$ .*

**d)** *le nombre hyperbolique*

$$|w|_{\mathbf{j}} := |z_1 - z_2 \mathbf{i}_1| \mathbf{e}_1 + |z_1 + z_2 \mathbf{i}_1| \mathbf{e}_2$$

*sera référencé comme le  $\mathbf{j}$ -module de  $w = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2$ .*

Dans les formules ci-dessus, la racine d'un nombre complexe (dans  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  ou  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_2)$ ) est considérée comme l'une des deux valeurs possibles prise avec une partie réelle non négative. En prenant  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , de deux valeurs

$$(\alpha + \beta \mathbf{i})^{\frac{1}{2}} = \pm \left( \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} + \mathbf{i} \cdot \operatorname{sgn}(\beta) \sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} \right)$$

nous choisissons

$$\sqrt{\alpha + \beta \mathbf{i}} := \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} + \mathbf{i} \cdot \operatorname{sgn}(\beta) \sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}}$$

où

$$\operatorname{sgn}(\beta) := \begin{cases} 1 & \text{si } \beta \geq 0, \\ -1 & \text{si } \beta < 0. \end{cases}$$

De plus, le  $\mathbf{j}$ -module peut être justifié comme suit:

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2 \mathbf{i}_2)^{\dagger 1} &= \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \mathbf{i}_2 \\ &= (\bar{z}_1 + \bar{z}_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + (\bar{z}_1 - \bar{z}_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2 \\ &= \overline{(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)} \mathbf{e}_1 + \overline{(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)} \mathbf{e}_2, \end{aligned}$$

donc,

$$w \cdot w^{\dagger 1} = |z_1 - z_2 \mathbf{i}_1|^2 \mathbf{e}_1 + |z_1 + z_2 \mathbf{i}_1|^2 \mathbf{e}_2 \in \mathbb{D}$$

et

$$\sqrt{w \cdot w^{\dagger 1}} = \sqrt{|z_1 - z_2 \mathbf{i}_1|^2 \mathbf{e}_1 + |z_1 + z_2 \mathbf{i}_1|^2 \mathbf{e}_2},$$

où notre choix de racine carrée est:

$$\begin{aligned} \sqrt{|z_1 - z_2 \mathbf{i}_1|^2 \mathbf{e}_1 + |z_1 + z_2 \mathbf{i}_1|^2 \mathbf{e}_2} &:= \sqrt{|z_1 - z_2 \mathbf{i}_1|^2} \mathbf{e}_1 + \sqrt{|z_1 + z_2 \mathbf{i}_1|^2} \mathbf{e}_2 \\ &= |z_1 - z_2 \mathbf{i}_1| \mathbf{e}_1 + |z_1 + z_2 \mathbf{i}_1| \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Alors, pour  $w = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2$ , nous pouvons conclure que:

$$\begin{aligned} |w|_{\mathbf{i}_1} = |w|_c &= \sqrt{w \cdot w^{\dagger 2}}, \\ |w|_{\mathbf{i}_2} &= \sqrt{w \cdot w^{\dagger 1}}, \\ |w|_{\mathbf{j}} &= \sqrt{w \cdot w^{\dagger 3}} \end{aligned}$$

et

$$|w| = \sqrt{\operatorname{Re}(w \cdot w^{\dagger 1})} = \sqrt{\operatorname{Re}(|w|_{\mathbf{j}}^2)}.$$

### 3.3.1 Nombres bicomplexes inversibles

Il nous apparaît que la condition pour qu'un nombre bicomplexe soit inversible dépende de son module complexe et non pas de son module réel. Considérons (3.1).

Si  $|w|_c \neq 0$  alors

$$w \cdot \frac{w^{\dagger 2}}{|w|_c^2} = \frac{w^{\dagger 2}}{|w|_c^2} \cdot w = 1$$

ce qui signifie que pour un tel  $w$  il existe un inverse  $w^{-1}$  exprimé par

$$w^{-1} = \frac{w^{\dagger 2}}{|w|_c^2}. \quad (3.4)$$

Assumons maintenant que  $w \neq 0$  mais que  $|w|_c = 0$ ; alors  $w^{\dagger 2} \neq 0$  mais (3.1) indique que

$$w \cdot w^{\dagger 3} = 0,$$

ce qui signifie que  $w$  ne peut être inversible puisque cela impliquerait que  $w^{\dagger 2} = 0$ . Notons par  $\mathbb{T}^{-1}$  l'ensemble de tous les éléments inversibles dans  $\mathbb{T}$ , nous venons de prouver ce qui suit.

#### **Théorème 3.3.2 (Nombres bicomplexes inversibles)**

$$\mathbb{T}^{-1} = \{w = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 \mid z_1^2 + z_2^2 = |w|_c^2 \neq 0\}.$$

Une conséquence immédiate de ceci est:

**Corollaire 3.3.3** *Les nombres bicomplexes inversibles possèdent les propriétés suivantes:*

- a) *Soit  $s$  et  $t \in \mathbb{T}$ , si  $s$  et  $t$  sont inversibles, alors  $st$  est aussi inversible et  $(st)^{-1} = s^{-1}t^{-1}$ .*
- b) *Soit  $w \in \mathbb{T}$ ,  $w$  est inversible si et seulement si  $w^{\dagger 2}$  est aussi inversible; de plus  $(w^{\dagger 3})^{-1} = (w^{-1})^{\dagger 2}$ .*

L'ensemble  $\mathcal{NC} = \{z_1 + z_2\mathbf{i}_2 \mid z_1^2 + z_2^2 = 0\} = \{z_1 + z_2\mathbf{j} \mid z_1^2 - z_2^2 = 0\}$  est appelé l'ensemble des *diviseurs de zéro* de  $\mathbb{T}$ , ou de façon équivalente, le *cône-nul*. Nous pouvons aussi écrire:

$$\mathcal{NC} = \mathcal{O}_2 = \{z(\mathbf{i}_1 \pm \mathbf{i}_2) \mid z \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)\}$$

où  $\mathbf{i}_1 \pm \mathbf{i}_2$  sont les diviseurs de zéro de base,  $(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2)(\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2) = 0$ . En fait,  $w \in \mathbb{T}$  appartient au cône-nul si et seulement si au moins un de  $P_1(w)$  ou  $P_2(w)$  est égal à zéro. De plus, si  $u \in \mathbb{T}^{-1}$  alors

$$P_1(u^{-1}) = (P_1(u))^{-1}, \quad P_2(u^{-1}) = (P_2(u))^{-1}.$$

**Corollaire 3.3.4** *Soit  $w \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$  et  $w \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  ou  $w \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_2)$ , alors  $w \in \mathbb{T}^{-1}$ .*

En d'autres mots,  $(\mathbb{C}(\mathbf{i}_1) \cup \mathbb{C}(\mathbf{i}_2)) \setminus \{0\} \subset \mathbb{T}^{-1}$ .

## 3.4 Propriétés des modules

### 3.4.1 Module réel

Nous savons que la fonction  $|\cdot| : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  est une norme sur l'espace réel  $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{T}$ , i.e.  $\forall s, t \in \mathbb{T}$  et  $a \in \mathbb{R}$ :

- (1)  $|s| \geq 0$ ,
- (2)  $|s| = 0 \Leftrightarrow s = 0$ ,
- (3)  $|a \cdot s| = |a||s|$ ,
- (4)  $|s + t| \leq |s| + |t|$ .

Puisque, l'espace  $\mathbb{R}^4$  avec la norme euclidienne est connu comme étant un espace complet, alors l'espace  $\mathbb{R}$ -linéaire normé  $\mathbb{T}$  est un espace complet. Plus précisément,  $(\mathbb{T}, +, \cdot, |\cdot|)$  est un espace de Banach.

**Lemme 3.4.1** *Soit  $s = s_1 + s_2\mathbf{i}_1 + s_3\mathbf{i}_2 + s_4\mathbf{j} \in \mathbb{T}$  et  $t = t_1 + t_2\mathbf{i}_1 + t_3\mathbf{i}_2 + t_4\mathbf{j} \in \mathbb{T}$ , alors,*

$$|s \cdot t|^2 - |s|^2 \cdot |t|^2 = 4(s_1s_4 - s_2s_3)(t_1t_4 - t_2t_3), \quad (3.5)$$

*ou de façon équivalente,*

$$|s \cdot t|^2 = |s|^2 \cdot |t|^2 + 4 \begin{vmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} t_1 & t_2 \\ t_3 & t_4 \end{vmatrix}.$$

**Preuve.** Nous avons que

$$\begin{aligned}
|s \cdot t|^2 - |s|^2 \cdot |t|^2 &= (s_1 t_1 + s_4 t_4 - s_2 t_2 - s_3 t_3)^2 + (s_1 t_2 + s_2 t_1 - s_3 t_4 - s_4 t_3)^2 \\
&+ (s_1 t_3 + s_3 t_1 - s_2 t_4 - s_4 t_2)^2 + (s_1 t_4 + s_2 t_3 + s_3 t_2 + s_4 t_1)^2 \\
&- ((s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2)(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2)) \\
&= 4s_1 s_4 t_1 t_4 - 4t_1 t_4 s_2 s_3 + 4s_2 s_3 t_2 t_3 - 4s_1 s_4 t_2 t_3 \\
&= 4t_1 t_2 (s_1 s_4 - s_2 s_3) + 4t_2 t_3 (s_2 s_3 - s_1 s_4) \\
&= 4(s_1 s_4 - s_2 s_3)(t_1 t_4 - t_2 t_3).
\end{aligned}$$

□

**Théorème 3.4.2** Soit  $s = s_1 + s_2 \mathbf{i}_1 + s_3 \mathbf{i}_2 + s_4 \mathbf{j} \in \mathbb{T}$  et  $t = t_1 + t_2 \mathbf{i}_1 + t_3 \mathbf{i}_2 + t_4 \mathbf{j} \in \mathbb{T}$ , alors

$$|s \cdot t| = |s| \cdot |t| \text{ si et seulement si une des matrices } \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_3 & t_4 \end{pmatrix}$$

est dégénérée.

$$\begin{aligned}
|s \cdot t| &> |s| \cdot |t| \text{ si et seulement si } \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{vmatrix} = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} t_1 & t_2 \\ t_3 & t_4 \end{vmatrix}. \\
|s \cdot t| &< |s| \cdot |t| \text{ si et seulement si } \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{vmatrix} = -\operatorname{sgn} \begin{vmatrix} t_1 & t_2 \\ t_3 & t_4 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

**Preuve.** La preuve est une conséquence directe du lemme 3.4.1. □

Voici quelques conséquences:

**Corollaire 3.4.3** Soit  $w \in \mathbb{T}$  et  $z \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  ou  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_2)$ , alors  $|z \cdot w| = |z||w|$ .

**Théorème 3.4.4** Soit  $s, t \in \mathbb{T}$  alors  $|s \cdot t| \leq \sqrt{2}|s||t|$ .

**Preuve.** Soit  $s = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{T}$  et  $t = z_3 + z_4 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{T}$ , alors

$$s \cdot t = (z_1 + z_2 \mathbf{i}_2) \cdot (z_3 + z_4 \mathbf{i}_2) = z_1(z_3 + z_4 \mathbf{i}_2) + z_2(z_3 + z_4 \mathbf{i}_2) \mathbf{i}_2.$$

De plus,  $|z_1(z_3 + z_4 \mathbf{i}_2)| = |z_1||z_3 + z_4 \mathbf{i}_2|$  et

$$\begin{aligned} |z_2(z_3 + z_4 \mathbf{i}_2) \mathbf{i}_2| &= |z_2| |(z_3 + z_4 \mathbf{i}_2) \mathbf{i}_2| \\ &= |z_2| |(z_3 + z_4 \mathbf{i}_2) \mathbf{i}_2| \\ &= |z_2| |(z_3 + z_4 \mathbf{i}_2)| |\mathbf{i}_2| \\ &= |z_2| |(z_3 + z_4 \mathbf{i}_2)|. \end{aligned}$$

Par l'inégalité du triangle, nous avons

$$\begin{aligned} |s \cdot t| = |(z_1 + z_2 \mathbf{i}_2) \cdot (z_3 + z_4 \mathbf{i}_2)| &\leq |z_1||z_3 + z_4 \mathbf{i}_2| + |z_2| |(z_3 + z_4 \mathbf{i}_2)| \\ &\leq (|z_1| + |z_2|) |z_3 + z_4 \mathbf{i}_2|. \end{aligned}$$

Puisque  $2|z_1||z_2| \leq |z_1|^2 + |z_2|^2$ , alors  $(|z_1| + |z_2|)^2 \leq 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ . Donc,

$$(|z_1| + |z_2|) \leq \sqrt{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2)^{1/2}.$$

□

Maintenant, d'après les observations suivantes:

$$|\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i| = |\mathbf{e}_i| = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} |\mathbf{e}_i| |\mathbf{e}_i|, \quad i = 1, 2,$$

nous notons que la constante  $\sqrt{2}$  est la meilleure possible dans le théorème 3.4.4. De plus, si nous combinons le dernier théorème avec le fait que  $(\mathbb{T}, +, \cdot, | \cdot |)$  est un espace de Banach, nous obtenons que  $(\mathbb{T}, +, \cdot, | \cdot |)$  est une algèbre de Banach réelle.

Finalement, nous concluons cette section avec un résultat analogue à celui de Pythagore:

**Théorème 3.4.5** *Soit  $z_1 + z_2\mathbf{i}_2 \in \mathbb{T}$ , alors*

$$|z_1 + z_2\mathbf{i}_2| = \left( \frac{|z_1 - z_2\mathbf{i}_1|^2 + |z_1 + z_2\mathbf{i}_1|^2}{2} \right)^{1/2},$$

*ou de façon équivalente*

$$2|w|^2 = |P_1(w)|^2 + |P_2(w)|^2.$$

**Preuve.** Soit  $z_1 = x_1 + y_1\mathbf{i}_1$  et  $z_2 = x_2 + y_2\mathbf{i}_1$ , alors  $z_1 - z_2\mathbf{i}_1 = (x_1 + y_2) + (y_1 - x_2)\mathbf{i}_1$  et  $z_1 + z_2\mathbf{i}_1 = (x_1 - y_2) + (y_1 + x_2)\mathbf{i}_1$ . De plus,

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2\mathbf{i}_1|^2 + |z_1 + z_2\mathbf{i}_1|^2 &= (x_1 + y_2)^2 + (y_1 - x_2)^2 \\ &\quad + (x_1 - y_2)^2 + (y_1 + x_2)^2 \\ &= 2(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2) \\ &= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \\ &= 2|z_1 + z_2\mathbf{i}_2|^2. \end{aligned}$$

□

### 3.4.2 $\mathbf{i}_1$ -module

**Proposition 3.4.6** *Soit  $w \in \mathbb{T}$ , alors  $|w|_c = 0$  si et seulement si  $w \in \mathcal{O}_2$ .*

**Preuve.** Il suffit de comparer les deux définitions, celle du module complexe et de  $\mathcal{O}_2$ , voir la section 3.3.1. □

**Corollaire 3.4.7** *Soit  $w \in \mathbb{T}$ , alors  $\|w\|_c = 0$  si et seulement si  $w \in \mathcal{O}_2$ .*



**Preuve.** Nous savons que  $|w|_c = 0 \Leftrightarrow |w|_c^2 = z_1^2 + z_2^2 = 0$ , alors,  $\|w|_c\| = 0 \Leftrightarrow \|w|_c^2\| = |z_1^2 + z_2^2| = 0$ . De plus,  $|z_1^2 + z_2^2| = 0 \Leftrightarrow z_1 + z_2\mathbf{i}_2 \in \mathcal{O}_2$ . Donc,  $\|w|_c\| = 0$  si et seulement si  $w \in \mathcal{O}_2$ .  $\square$

**Proposition 3.4.8** Soit  $s \in \mathbb{T}$  et  $t \in \mathbb{T}$  alors  $|s \cdot t|_c^2 = |s|_c^2 \cdot |t|_c^2$ .

**Preuve.** Soit  $s = z_1 + z_2\mathbf{i}_2$  et  $t = z_3 + z_4\mathbf{i}_2$ . Donc,

$$\begin{aligned}
|s \cdot t|_c^2 &= |(z_1 + z_2\mathbf{i}_2) \cdot (z_3 + z_4\mathbf{i}_2)|_c^2 \\
&= |(z_1z_3 - z_2z_4) + (z_1z_4 + z_2z_3)\mathbf{i}_2|_c^2 \\
&= (z_1z_3 - z_2z_4)^2 + (z_1z_4 + z_2z_3)^2 \\
&= (z_1z_3)^2 + (z_2z_4)^2 + (z_1z_4)^2 + (z_2z_3)^2 \\
&= |(z_1 + z_2\mathbf{i}_2)|_c^2 \cdot |(z_3 + z_4\mathbf{i}_2)|_c^2 \\
&= |s|_c^2 \cdot |t|_c^2.
\end{aligned}$$

$\square$

**Corollaire 3.4.9** Soit  $s \in \mathbb{T}$  et  $t \in \mathbb{T}$ . alors  $\|s \cdot t|_c\| = \|s|_c\| \cdot \|t|_c\|$ .

**Preuve.** D'après la proposition 3.4.8 nous avons que  $\|s \cdot t|_c^2\| = \|s|_c^2\| \cdot \|t|_c^2\| = \|s|_c^2\| \cdot \|t|_c^2\|$ . Donc,

$$\begin{aligned}
\|s \cdot t|_c\|^2 &= \|s|_c\|^2 \cdot \|t|_c\|^2 \\
&= (\|s|_c\| \cdot \|t|_c\|)^2.
\end{aligned}$$

$\square$

**Proposition 3.4.10** Soit  $w \in \mathbb{T}^{-1}$ , alors  $\|w|_c\|^{-1} = \|w^{-1}|_c\|$ .

**Preuve.** Soit  $w = z_1 + z_2\mathbf{i}_2$  inversible, alors  $\|w|_c^{-1}\| = \left| \frac{1}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}} \right|$ . De plus,

$$w^{-1} = \frac{z_1}{z_1^2 + z_2^2} - \mathbf{i}_2 \frac{z_2}{z_1^2 + z_2^2}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
||w^{-1}|_c| &= \left| \sqrt{\frac{z_1^2}{[z_1^2+z_2^2]^2} + \frac{z_2^2}{[z_1^2+z_2^2]^2}} \right| \\
&= \left| \sqrt{\frac{1}{z_1^2+z_2^2}} \right| \\
&= \left| \frac{1}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}} \right| \\
&= ||w|_c^{-1}|.
\end{aligned}$$

□

Nous pouvons exprimer la formule pour  $||w|_c|$ .

**Proposition 3.4.11** *Soit  $w = w_1 + w_2\mathbf{i}_1 + w_3\mathbf{i}_2 + w_4\mathbf{j} \in \mathbb{T}$ , alors*

$$||w|_c| = \sqrt[4]{(w_1^2 - w_2^2 + w_3^2 - w_4^2)^2 + 4(w_1w_2 + w_3w_4)^2}.$$

**Preuve.** Soit  $w = w_1 + w_2\mathbf{i}_1 + w_3\mathbf{i}_2 + w_4\mathbf{j} = z_1 + z_2\mathbf{i}_2 \in \mathbb{T}$ , alors

$$\begin{aligned}
|w|_c = \sqrt{z_1^2 + z_2^2} &:= \sqrt{\alpha + \beta\mathbf{i}_1} \\
&= \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} + \mathbf{i}_1 \cdot \operatorname{sgn}(\beta) \sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que  $||w|_c| = \sqrt{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \sqrt[4]{\alpha^2 + \beta^2}$ . Nous obtenons le résultat final avec le fait suivant:

$$z_1^2 + z_2^2 = (w_1^2 - w_2^2 + w_3^2 - w_4^2) + 2(w_1w_2 + w_3w_4)\mathbf{i}_1 = \alpha + \beta\mathbf{i}_1.$$

□

Mentionnons que l'application  $||\cdot|_c|$  ne possède pas la propriété fondamentale:

$$||s + t|_c| \leq ||s|_c| + ||t|_c|.$$

Pour constater ce fait, il suffit de prendre  $s := z(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2)$  et  $t := z(\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2)$  avec  $z \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1) \setminus \{0\}$  pour lequel  $s$  et  $t$  sont dans  $\mathcal{O}_2$  mais  $s + t = 2z\mathbf{i}_1$  est inversible. Dans ce cas  $|s|_c = |t|_c = 0$  mais  $|s + t|_c \neq 0$ .

### 3.4.3 $\mathbf{i}_2$ -module

**Proposition 3.4.12** *Soit  $s \in \mathbb{T}$  et  $t \in \mathbb{T}$ , alors  $|s \cdot t|_{\mathbf{i}_2}^2 = |s|_{\mathbf{i}_2}^2 \cdot |t|_{\mathbf{i}_2}^2$ .*

**Preuve.** Soit  $s = z_1 + z_2\mathbf{i}_2$  et  $t = z_3 + z_4\mathbf{i}_2$ , alors

$$\begin{aligned}
|s \cdot t|_{\mathbf{i}_2}^2 &= |(z_1 + z_2\mathbf{i}_2) \cdot (z_3 + z_4\mathbf{i}_2)|_{\mathbf{i}_2}^2 \\
&= |(z_1z_3 - z_2z_4) + (z_1z_4 + z_2z_3)\mathbf{i}_2|_{\mathbf{i}_2}^2 \\
&= [(z_1z_3 - z_2z_4) + (z_1z_4 + z_2z_3)\mathbf{i}_2][\overline{(z_1z_3 - z_2z_4)} + \overline{(z_1z_4 + z_2z_3)}\mathbf{i}_2] \\
&= (z_1z_3 - z_2z_4)(\overline{z_1z_3} - \overline{z_2z_4}) + (z_1z_3 - z_2z_4)(\overline{z_1z_4} + \overline{z_2z_3})\mathbf{i}_2 \\
&\quad + (z_1z_4 + z_2z_3)(\overline{z_1z_3} - \overline{z_2z_4})\mathbf{i}_2 - (z_1z_4 + z_2z_3)(\overline{z_1z_4} + \overline{z_2z_3}) \\
&= [z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2}\mathbf{i}_2 + \overline{z_1}z_2\mathbf{i}_2 - z_2\overline{z_2}][z_3\overline{z_3} + z_3\overline{z_4}\mathbf{i}_2 + \overline{z_3}z_4\mathbf{i}_2 - z_4\overline{z_4}] \\
&= [(z_1 + z_2\mathbf{i}_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}\mathbf{i}_2)][(z_3 + z_4\mathbf{i}_2)(\overline{z_3} + \overline{z_4}\mathbf{i}_2)] \\
&= |(z_1 + z_2\mathbf{i}_2)|_{\mathbf{i}_2}^2 \cdot |(z_3 + z_4\mathbf{i}_2)|_{\mathbf{i}_2}^2 \\
&= |s|_{\mathbf{i}_2}^2 \cdot |t|_{\mathbf{i}_2}^2.
\end{aligned}$$

□

**Proposition 3.4.13** *Soit  $w \in \mathbb{T}$ , alors  $|w|_{\mathbf{i}_2} = 0$  si et seulement si  $w \in \mathcal{O}_2$ .*

**Preuve.** Soit  $w = z_1 + z_2\mathbf{i}_2$ . De la définition du module dans  $\mathbf{i}_2$ :  $|w|_{\mathbf{i}_2} \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_2)$ . Ce qui implique que  $|w|_{\mathbf{i}_2} = 0 \Leftrightarrow |w|_{\mathbf{i}_2}^2 = w \cdot w^{\dagger_1} = 0$ . Alors,  $|w|_{\mathbf{i}_2} = 0$  si et seulement si:

$$\begin{aligned}
(z_1 + z_2\mathbf{i}_2)(z_1 + z_2\mathbf{i}_2)^{\dagger_1} &= (z_1 + z_2\mathbf{i}_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}\mathbf{i}_2) \\
&= [(z_1 - z_2\mathbf{i}_1)\mathbf{e}_1 + (z_1 + z_2\mathbf{i}_1)\mathbf{e}_2] \\
&\quad \cdot [(\overline{z_1} - \overline{z_2}\mathbf{i}_1)\mathbf{e}_1 + (\overline{z_1} + \overline{z_2}\mathbf{i}_1)\mathbf{e}_2] \\
&= (z_1 - z_2\mathbf{i}_1)(\overline{z_1} - \overline{z_2}\mathbf{i}_1)\mathbf{e}_1 + (z_1 + z_2\mathbf{i}_1)(\overline{z_1} + \overline{z_2}\mathbf{i}_1)\mathbf{e}_2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc,  $|w|_{\mathbf{i}_2} = 0$  si et seulement si  $(z_1 - z_2\mathbf{i}_1)(\overline{z_1} - \overline{z_2}\mathbf{i}_1) = 0$  et  $(z_1 + z_2\mathbf{i}_1)(\overline{z_1} + \overline{z_2}\mathbf{i}_1) = 0$ , i.e.  $w \in \mathcal{NC} = \{z_1 + z_2\mathbf{i}_2 \mid z_1^2 + z_2^2 = 0\}$ .  $\square$

Finalement, nous obtenons la connection suivante entre le  $\mathbf{i}_1$ -module et le  $\mathbf{i}_2$ -module.

**Proposition 3.4.14** *Soit  $w \in \mathbb{T}$ , alors  $\|w\|_{\mathbf{i}_1} = \|w\|_{\mathbf{i}_2}$ .*

**Preuve.** Cette preuve peut être établie par un calcul direct en utilisant la définition de la section 3.4.1.  $\square$

### 3.4.4 $\mathbf{j}$ -module

**Proposition 3.4.15** *Soit  $w_1 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  et  $w_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_2)$ , alors*

$$|w_1|_{\mathbf{j}} = |w_1| \text{ et } |w_2|_{\mathbf{j}} = |w_2|.$$

**Preuve.** Cette preuve découle directement de la définition de la section 3.3.  $\square$

**Proposition 3.4.16** *Soit  $w \in \mathbb{T}$ , alors  $|w|_{\mathbf{j}} = 0$  si et seulement si  $w = 0$ .*

**Preuve.** Soit  $w = z_1 + z_2\mathbf{i}_2$ , alors  $|w|_{\mathbf{j}} \in \mathbb{C}(\mathbf{j})$ . Ce qui implique que  $|w|_{\mathbf{j}} = 0$  si et seulement si:

$$\begin{aligned} \sqrt{(z_1 + z_2\mathbf{i}_2)(z_1 + z_2\mathbf{i}_2)^\dagger} &= |z_1 - z_2\mathbf{i}_1|\mathbf{e}_1 + |z_1 + z_2\mathbf{i}_1|\mathbf{e}_2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc,  $|w|_{\mathbf{j}} = 0$  si et seulement si  $|z_1 - z_2\mathbf{i}_1| = 0$  et  $|z_1 + z_2\mathbf{i}_1| = 0$ , i.e.  $z_1 - z_2\mathbf{i}_1 = 0$  et  $z_1 + z_2\mathbf{i}_1 = 0$ .  $\square$

Le théorème suivant montre que le module réel du  $\mathbf{j}$ -module est la distance euclidienne dans  $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{T} = \mathbb{C}_2$ .

**Théorème 3.4.17** Soit  $w \in \mathbb{T}$ , alors

$$\|w\|_j = |w| = \sqrt{\operatorname{Re}(|w|_j^2)}.$$

**Preuve.** D'après le théorème 3.4.5,

$$\begin{aligned} \|w\|_j &= |(|z_1 - z_2 \mathbf{i}_1| \mathbf{e}_1 + |z_1 + z_2 \mathbf{i}_1| \mathbf{e}_2)| \\ &= \left( \frac{|(|z_1 - z_2 \mathbf{i}_1|)|^2 + |(|z_1 + z_2 \mathbf{i}_1|)|^2}{2} \right)^{1/2} \\ &= \left( \frac{|z_1 - z_2 \mathbf{i}_1|^2 + |z_1 + z_2 \mathbf{i}_1|^2}{2} \right)^{1/2} \\ &= |w|. \end{aligned}$$

De plus, nous savons déjà que  $|w| = \sqrt{\operatorname{Re}(w \cdot w^{\dagger 1})} = \sqrt{\operatorname{Re}(|w|_j^2)}$ . Donc,  $\|w\|_j = |w| = \sqrt{\operatorname{Re}(|w|_j^2)}$ .  $\square$

**Proposition 3.4.18** Soit  $s \in \mathbb{T}$  et  $t \in \mathbb{T}$ , alors  $|s \cdot t|_j = |s|_j |t|_j$ .

**Preuve.** Soit  $s = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{T}$  et  $t = z_3 + z_4 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{T}$ , alors

$$\begin{aligned} |s \cdot t|_j &= |[(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + (z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2] \cdot [(z_3 - z_4 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + (z_3 + z_4 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2]| \\ &= |(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)(z_3 - z_4 \mathbf{i}_1)| \mathbf{e}_1 + |(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)(z_3 + z_4 \mathbf{i}_1)| \mathbf{e}_2 \\ &= |(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)| \cdot |(z_3 - z_4 \mathbf{i}_1)| \mathbf{e}_1 + |(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)| \cdot |(z_3 + z_4 \mathbf{i}_1)| \mathbf{e}_2 \\ &= [|z_1 - z_2 \mathbf{i}_1| \mathbf{e}_1 + |z_1 + z_2 \mathbf{i}_1| \mathbf{e}_2] \cdot [|z_3 - z_4 \mathbf{i}_1| \mathbf{e}_1 + |z_3 + z_4 \mathbf{i}_1| \mathbf{e}_2] \\ &= |s|_j |t|_j. \end{aligned}$$

$\square$

## 3.5 Résultats avancés

Nous présentons ici, sans démonstration, les résultats avancés nécessaires à la preuve des formules pour borner la distance.

### 3.5.1 Exponentielle et logarithme bicomplexe

Soit  $w = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{T}$ . Définissons

$$e^{z_1 + z_2 \mathbf{i}_2} := e^{z_1} e^{z_2 \mathbf{i}_2} \text{ où } e^{z_2 \mathbf{i}_2} := \cos(z_2) + \mathbf{i}_2 \sin(z_2).$$

**Définition 3.5.1 (Exponentielle)** *La fonction*

$$w \in \mathbb{T} \rightarrow e^w$$

*se nomme l'exponentielle d'une variable bicomplexe et est notée exp, i.e.,  $\exp w := e^w$ .*

Il est évident que la fonction exponentielle bicomplexe est une extension de son analogue complexe puisque

$$\exp(z + 0\mathbf{i}_2) = e^z \quad \forall z \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$$

et

$$\exp(z_1 + z_2 \mathbf{i}_2) = e^{z_1} e^{z_2 \mathbf{i}_2} = e^{z_1 + z_2 \mathbf{i}_2} \quad \forall z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_2).$$

Voici quelques propriétés importantes de cette fonction.

**Proposition 3.5.2** *Soit  $w = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{T}$ . Alors*

$$e^w = e^{z_1 + z_2 \mathbf{i}_2} = e^{z_1 - z_2 \mathbf{i}_1} \mathbf{e}_1 + e^{z_1 + z_2 \mathbf{i}_1} \mathbf{e}_2.$$

**Proposition 3.5.3** *Soit  $w \in \mathbb{T}$ . Alors  $e^w$  est toujours inversible et  $(e^w)^{-1} = e^{-w}$ .*

Dans  $\mathbb{T}$ , le logarithme bicomplexe  $\ln(z_1 + z_2 \mathbf{i}_2)$  est défini comme l'inverse de la fonction exponentielle bicomplexe  $e^{z_1 + z_2 \mathbf{i}_2} := e^{z_1} [\cos(z_2) + \mathbf{i}_2 \sin(z_2)]$ . Le théorème

suisant (voir [16]) montre, avec l'aide de la représentation idempotente dans  $\mathbb{T}$ , que  $\ln(z_1 + z_2\mathbf{i}_2)$  possède une représentation en terme de logarithme complexe.

**Théorème 3.5.4** *Si  $z_1 + z_2\mathbf{i}_2$  est non-inversible, c'est-à-dire que si  $z_1 - z_2\mathbf{i}_1 \neq 0$  et  $z_1 + z_2\mathbf{i}_1 \neq 0$  alors  $\ln(z_1 + z_2\mathbf{i}_2)$  est défini et*

$$\ln(z_1 + z_2\mathbf{i}_2) = \ln(z_1 - z_2\mathbf{i}_1)\mathbf{e}_1 + \ln(z_1 + z_2\mathbf{i}_1)\mathbf{e}_2.$$

### 3.5.2 Notions de différentiabilité bicomplexe

Il est aussi possible de définir la notion de différentiabilité d'une fonction à un point de  $\mathbb{T}$  [17]:

**Définition 3.5.5** *Soit  $U$  un ensemble ouvert de  $\mathbb{T}$  et  $w_0 \in U$ . Alors,  $f : U \subseteq \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$  sera nommé  $\mathbb{T}$ -différentiable à  $w_0$  avec la dérivée égale à  $f'(w_0) \in \mathbb{T}$  si*

$$\lim_{\substack{w \rightarrow w_0 \\ (w-w_0 \text{ inv.})}} \frac{f(w) - f(w_0)}{w - w_0} = f'(w_0).$$

Nous pouvons affirmer que la fonction  $f$  est  $\mathbb{T}$ -holomorphe sur un ensemble ouvert  $U$  si et seulement si  $f$  est  $\mathbb{T}$ -différentiable à tous les points de  $U$ .

Comme nous l'avons vu, un nombre bicomplexe peut être considéré comme un élément de  $\mathbb{C}^2$ , alors une fonction  $f(z_1 + z_2\mathbf{i}_2) = f_1(z_1, z_2) + f_2(z_1, z_2)\mathbf{i}_2$  de  $\mathbb{T}$  peut être définie comme une application  $f(z_1, z_2) = (f_1(z_1, z_2), f_2(z_1, z_2))$  de  $\mathbb{C}^2$ . Nous avons la caractérisation de ce type d'application:

**Théorème 3.5.6** *Soit  $U$  un ensemble ouvert et  $f : U \subseteq \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$  telle que  $f \in C^1(U)$ . Aussi, soit  $f(z_1 + z_2\mathbf{i}_2) = f_1(z_1, z_2) + f_2(z_1, z_2)\mathbf{i}_2$ . Alors  $f$  est  $\mathbb{T}$ -holomorphe sur  $U$  si et seulement si:*

$$f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont holomorphes dans } z_1 \text{ et } z_2$$

et,

$$\frac{\partial f_1}{\partial z_1} = \frac{\partial f_2}{\partial z_2} \text{ et } \frac{\partial f_2}{\partial z_1} = -\frac{\partial f_1}{\partial z_2} \text{ sur } U.$$

De plus,  $f' = \frac{\partial f_1}{\partial z_1} + \frac{\partial f_2}{\partial z_1} \mathbf{i}_2$  et  $f'(w)$  est inversible si et seulement si  $\det \mathcal{J}_f(w) \neq 0$ .

Ce théorème peut être obtenu avec les résultats dans [16] et [17]. De plus, par le théorème de Hartogs [25], il est possible de montrer que “ $f \in C^1(U)$ ” peut être retiré des hypothèses. Il est alors naturel de définir la classe correspondante d’applications pour  $\mathbb{C}^2$ :

**Définition 3.5.7** *La classe des applications  $\mathbb{T}$ -holomorphes sur l’ensemble ouvert  $U \subseteq \mathbb{C}^2$  est définie de la façon suivante:*

$$TH(U) := \{f: U \subseteq \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \mid f \in H(U) \text{ et } \frac{\partial f_1}{\partial z_1} = \frac{\partial f_2}{\partial z_2}, \frac{\partial f_2}{\partial z_1} = -\frac{\partial f_1}{\partial z_2} \text{ sur } U\}.$$

*C’est la classe des applications holomorphes de  $\mathbb{C}^2$  qui satisfont aux équations de Cauchy-Riemann généralisées.*

Nous remarquons que  $f \in TH(U)$  sur  $\mathbb{C}^2$  si et seulement si  $f$  est  $\mathbb{T}$ -différentiable sur  $U$ . Maintenant, comme conséquence de la représentation idempotente, nous pouvons définir le produit cartésien bicomplexe:

**Définition 3.5.8** *Nous appellerons  $X \subseteq \mathbb{T}$  l’ensemble  $\mathbb{T}$ -cartésien déterminé par  $X_1$  et  $X_2$  si  $X = X_1 \times_e X_2 := \{z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{T} : z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 = w_1 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2, (w_1, w_2) \in X_1 \times X_2\}$ .*

**Définition 3.5.9** *Soit  $A = A_1 \times_e A_2$  et  $B = B_1 \times_e B_2$ . Alors,*

$$A \setminus_e B := (A_1 \setminus B_1) \times_e (A_2 \setminus B_2).$$



Dans [16] il est montré que si  $X_1$  et  $X_2$  sont de domaine  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  alors  $X_1 \times_e X_2$  est aussi de domaine  $\mathbb{T}$ . Alors, une façon de construire des “disques” (de centre 0) dans  $\mathbb{T}$  est de prendre le produit  $\mathbb{T}$ -cartésien de disques (de centre 0) dans  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ . Donc, nous définissons le “disque” de rayons  $r_1$  et  $r_2$  de  $\mathbb{T}$  comme suit [16]:  $D(0; r_1, r_2) := B^1(0, r_1) \times_e B^1(0, r_2) = \{z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 : z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 = w_1 e_1 + w_2 e_2, |w_1| < r_1, |w_2| < r_2\}$  où  $B^n(0, r_i)$  est la boule ouverte de  $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{C}^n(\mathbf{i}_1)$  de rayon  $r_i$  pour  $i = 1, 2$ . De plus, dans le cas où  $r = r_1 = r_2$ , nous notons  $D(0; r_1, r_2) = D(0, r)$  et nous appelons cet ensemble le  $\mathbb{T}$ -disque de rayon  $r$ . Il est possible de prouver que  $D(0, r)$  est, en fait, la boule de Lie [1] de rayon  $r$  dans  $\mathbb{C}^2$ .

La notion d’holomorphité peut être aussi vue à l’aide de la représentation idempotente de la section 3.1.2. Il est maintenant possible d’énoncer le théorème suivant [16]:

**Théorème 3.5.10** *Si  $f_{e_1} : X_1 \longrightarrow \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  et  $f_{e_2} : X_2 \longrightarrow \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  sont des fonctions holomorphes de  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  sur le domaine  $X_1$  et  $X_2$  respectivement, alors la fonction  $f : X_1 \times_e X_2 \longrightarrow \mathbb{T}$  définie comme*

$$f(z_1 + z_2 \mathbf{i}_2) = f_{e_1}(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + f_{e_2}(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2 \quad \forall z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 \in X_1 \times_e X_2$$

*est  $\mathbb{T}$ -holomorphe sur le domaine  $X_1 \times_e X_2$  et*

$$f'(z_1 + z_2 \mathbf{i}_2) = f'_{e_1}(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + f'_{e_2}(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2$$

$$\forall z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 \in X_1 \times_e X_2.$$

**Théorème 3.5.11** *Soit  $X$  un domaine dans  $\mathbb{T}$  et soit  $f : X \longrightarrow \mathbb{T}$  une fonction  $\mathbb{T}$ -holomorphe sur  $X$ . Alors il existe des fonctions holomorphes  $f_{e_1} : X_1 \longrightarrow \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$*

et  $f_{e_2} : X_2 \longrightarrow \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  avec  $X_1 = P_1(X)$  et  $X_2 = P_2(X)$ , telle que:

$$f(z_1 + z_2\mathbf{i}_2) = f_{e_1}(z_1 - z_2\mathbf{i}_1)\mathbf{e}_1 + f_{e_2}(z_1 + z_2\mathbf{i}_1)\mathbf{e}_2 \quad \forall z_1 + z_2\mathbf{i}_2 \in X.$$

Nous notons ici que  $X_1$  et  $X_2$  seront aussi de domaine  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ .

# Chapitre 4

## Bornes de la distance à l'ensemble de Mandelbrot

Dans ce chapitre, nous développerons les formules pour les bornes de distance et leur approximation pour les ensembles de Mandelbrot et Julia. Les deux définitions suivantes précisent ces ensembles.

**Définition 4.0.1 (Ensemble de Mandelbrot  $\mathcal{M}$ )** *Pour tout  $c \in \mathbb{C}$ , nous associons l'application  $f_c(z) = z^2 + c$ . Si l'itération de  $f_c(z)$  appliquée à 0 ne converge pas vers l'infini alors  $c \in \mathcal{M}$ , i.e.*

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} : f_c^{on}(0) \not\rightarrow \infty \text{ lorsque } n \rightarrow \infty\}.$$

*Cet ensemble, appelé l'ensemble de Mandelbrot, est fermé et connexe [3].*

**Définition 4.0.2 (Ensemble de Julia rempli  $\mathcal{K}_c$ )** *Soit l'application  $f_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f_c(z) = z^2 + c$ ,  $c \in \mathbb{C}$ . Si l'itération de  $f_c(z)$  appliquée à  $z \in \mathbb{C}$  ne converge pas vers l'infini alors  $z \in \mathcal{K}_c$ , i.e.*

$$\mathcal{K}_c = \{z \in \mathbb{C} : f_c^{on}(z) \not\rightarrow \infty \text{ lorsque } n \rightarrow \infty\}.$$

*Cet ensemble est appelé l'ensemble de Julia rempli associé à  $c$ , il est fermé et soit connexe, soit une poussière de Cantor [3].*

Dans les sections qui suivent, nous fournissons la démarche analytique pour prouver rigoureusement les formules. Notons que lorsque nous référerons aux ensembles de Julia, il sera question uniquement des ensembles remplis et connexes.

## 4.1 Potentiel et distance

Les formules qui bornent la distance utilisent le potentiel des ensembles. Définissons le potentiel de nos ensembles comme étant 0 et celui de l'infini comme étant très élevé. Le potentiel croîtra graduellement, au fur et à mesure que nous nous éloignerons de l'ensemble. Le même stratagème peut être utilisé avec le disque unité.

Alors, grâce aux travaux de Hubbard et Douady qui affirment que nous pouvons trouver des applications  $\phi_c$  ou  $\psi$  de nos ensembles au disque unité, nous nous servirons du potentiel pour appliquer les résultats de distance du disque unité vers nos ensembles.

Par une propriété mathématique remarquable, le potentiel peut être calculé à l'aide de l'algorithme d'échappement. Cet algorithme consiste à calculer le nombre d'itérations nécessaires pour que la norme du point dépasse une certaine taille. Il peut aussi servir à représenter les ensembles de Mandelbrot et Julia. Dans notre cas, il sera utilisé pour calculer les estimations des bornes.

## 4.2 Borne supérieure aux ensembles de Julia remplis

Grâce aux résultats en analyse complexe, il est possible d'élaborer une formule qui borne supérieurement la distance aux ensembles de Julia. La démarche qui suit servira à démontrer le lemme de Schwarz, pilier de cette formule.

### 4.2.1 Lemme de Schwarz

**Lemme 4.2.1 (Identité de Parseval)** *Soit  $f$  une fonction dont la décomposition en série de Taylor est la suivante:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

dans  $N(z_0, R) = \{z : |z - z_0| < R\}$ . Si  $0 < r < R$ , alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

**Preuve.** Puisque

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) \overline{f(z_0 + re^{i\theta})} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_0 + re^{i\theta} - z_0)^n \right) \left( \sum_{m=0}^{\infty} \overline{a_m (z_0 + re^{i\theta} - z_0)^m} \right) d\theta \end{aligned}$$

car le conjugué est continu et par la formule de De Moivre,

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r^n e^{ni\theta}) \right) \left( \sum_{m=0}^{\infty} \overline{a_m (r^m e^{mi\theta})} \right) d\theta.$$

De plus, grâce à l'identité suivante:

$$\overline{e^{ki\theta}} = \cos(k\theta) - i\sin(k\theta) = \cos(-k\theta) + i\sin(-k\theta) = e^{-ki\theta}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r^n e^{ni\theta}) \right) \left( \sum_{m=0}^{\infty} \overline{a_m}(r^m e^{-mi\theta}) \right) d\theta. \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r^n e^{ni\theta}) \right) \left( \overline{a_n}(r^n e^{-ni\theta}) + \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^{\infty} \overline{a_m}(r^m e^{-mi\theta}) \right) d\theta.
\end{aligned}$$

et en multipliant de terme à terme

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^{\infty} a_n \overline{a_m} (r^{n+m} e^{(n-m)i\theta}) \right) d\theta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \quad (\text{voir annexe A})
\end{aligned}$$

car pour  $n \neq m$

$$\int_0^{2\pi} e^{(n-m)i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \left( \cos((n-m)\theta) + i \sin((n-m)\theta) \right) d\theta = 0.$$

□

**Lemme 4.2.2** *Soit  $f$  une fonction dont la décomposition en série de Taylor est la suivante:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

dans  $N(z_0, R) = \{z : |z - z_0| < R\}$ . Si  $0 < r < R$ . Si  $M(r)$  est le maximum de  $|f|$  sur le cercle  $|z - z_0| = r$ , alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq M^2(r).$$

**Preuve.** Puisque

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r e^{i\theta})|^2 d\theta \leq \frac{M^2(r)}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = M^2(r)$$

par l'identité de Parseval,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq M^2(r)$$

□

**Lemme 4.2.3 (Théorème du module maximum)** *Assumons que  $f$  est analytique sur un ouvert connexe  $S$  dans  $\mathbb{C}$ , et supposons que  $f$  n'est pas constante. Soit  $\tau = \{z : |z - z_0| = r\} \subset N(z_0, R) \subset S$  Si  $|f(z)| \leq M$  sur  $\tau$  alors*

$$|f(z)| < M$$

*pour tous les points dans l'intérieur géométrique de  $\tau$ .*

**Preuve.** Supposons qu'il existe un point  $z_0$  dans l'intérieur géométrique de  $\tau$  tel que

$$f(z_0) \geq M.$$

On remarque que la décomposition de  $f$  en série de Taylor autour de  $z_0$ , évaluée à  $z_0$  est

$$f(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_0 - z_0)^n = a_0.$$

Ainsi, par le lemme précédent

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq [\max_{z \in \tau} |f(z)|]^2 \leq [f(z_0)]^2 = a_0^2,$$

ce qui implique que les coefficients  $a_n = 0$  pour  $n = 1, 2, \dots$ . Alors, puisque  $S$  est connexe,  $f(z)$  est une constante sur  $S$ , ce qui est une contradiction. □

**Lemme 4.2.4 (de Schwarz)** *Soit  $f$  analytique sur  $N(0,1) = \{z : |z| < 1\}$ . Supposons que  $f(0) = 0$  et que  $|f(z)| \leq 1$  sur  $N(0,1)$ . Si  $|z| < 1$ , alors  $|f'(0)| \leq 1$  et  $|f(z)| \leq |z|$ .*

**Preuve.** Pour tout  $z_0$ , tel que  $|z_0| < 1$ , nous pouvons définir un disque  $|z| < 1 - \epsilon$ , pour un certain  $0 < \epsilon < 1$ , tel que  $|z_0|$  est à l'intérieur du disque. Soit  $g(z) = \frac{f(z)}{z}$  et puisque

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} g(z) = g(0),$$

$g(0) = f'(0)$  car 0 est un point singulier apparent. Pour  $|z| = 1 - \epsilon$  nous avons

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{|z|} = \frac{1}{1 - \epsilon},$$

et par le théorème du module maximum,  $|g(z_0)| < \frac{1}{1 - \epsilon}$ . De plus,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |g(z_0)| \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \epsilon} = 1.$$

Ainsi,  $|g(z_0)| \leq 1$  pour tout  $z_0$ ,  $|z_0| < 1$ . C'est-à-dire,  $|f(z_0)| \leq |z_0|$ . Donc,  $|f(z)| \leq |z|$ , pour  $|z| < 1$ , et  $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$ .  $\square$

**Lemme 4.2.5** Soit  $f$  analytique sur  $N(a, r) = \{z : |z - a| < r\}$  avec  $r > 0$ . Supposons que  $f(a) = 0$  et que  $f(z) \leq 1$  sur  $N(a, r)$ . Si  $|z - a| < r$ , alors  $|f'(a)| \leq \frac{1}{r}$  et  $|f(z)| \leq \frac{|z - a|}{r}$ .

**Preuve.** Pour tout  $z_0$  tel que  $|z_0 - a| < r$ , nous pouvons définir un disque  $|z - a| < r - \epsilon$ , pour un certain  $0 < \epsilon < r$ , tel que  $|z_0 - a|$  est à l'intérieur du disque. Soit  $g(z) = \frac{f(z)}{z - a}$  et puisque

$$f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} g(z) = g(a),$$

$g(a) = f'(a)$  car  $a$  est un point singulier apparent. Pour  $|z - a| = r - \epsilon$  nous avons

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z - a|} \leq \frac{1}{|z - a|} = \frac{1}{r - \epsilon},$$

et par le théorème du module maximum,  $|g(z_0)| < \frac{1}{r - \epsilon}$ . De plus,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |g(z_0)| \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{r - \epsilon} = \frac{1}{r}.$$

Ainsi,  $|g(z_0)| \leq \frac{1}{r}$  pour tout  $z_0$ ,  $|z_0 - a| < r$ . C'est-à-dire,  $|f(z_0)| \leq \frac{|z_0 - a|}{r}$ . Donc,  $|f(z)| \leq \frac{|z - a|}{r}$ , pour  $|z - a| < r$ , et  $|f'(a)| = |g(a)| \leq \frac{1}{r}$ .  $\square$



## 4.2.2 Borne supérieure

Grâce au lemme de Schwarz, nous pouvons découler la formule de la borne supérieure dans le plan complexe. Cette formule sera utilisée pour développer la borne supérieure bicomplexe dans le chapitre suivant.

**Théorème 4.2.6 (Borne supérieure)** *La distance d'un point  $z$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus K_c$ , à  $K_c$  est strictement inférieure à  $\frac{2 \sinh[G(z)]}{|G'(z)|}$  où  $G(z)$  est le potentiel au point  $z$ . C'est-à-dire*

$$d(z, K_c) < \frac{2 \sinh[G(z)]}{|G'(z)|}.$$

**Preuve.** Soit  $\phi_c$ , une application biholomorphe

$$\phi_c : \mathbb{C} \setminus K_c \rightarrow \mathbb{C} \setminus \bar{D}$$

où  $D = \{z : |z| < 1\}$  (voir [2], [5] et [13] pour l'existence d'une telle application).

Soit

$$W(\mu) = \frac{1}{\phi_c(\mu)}$$

et

$$G(\mu) = -\ln|W(\mu)| = \ln|\phi_c(\mu)|.$$

Nous définissons une fonction  $F(w) = \frac{w-w_0}{1-w\bar{w}_0}$  où  $w_0 = W(\mu_0)$  et  $\mu_0 \in \mathbb{C} \setminus K_c$ . C'est une transformation homographique car  $1 - w_0\bar{w}_0 \neq 0$ . Démontrons que  $F'(w_0) > 0$ .

En utilisant la définition de la dérivée nous avons

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(w+h) - F(w)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{1 - w_0\bar{w}_0 - h\bar{w}_0} = \frac{1}{1 - w_0\bar{w}_0}.$$

Cependant, de la définition de  $\phi(z)$ , comme  $\mu_0 \notin K_c$ , nous obtenons que  $|W(\mu_0)| < 1$ . Ainsi, puisque

$$|W(\mu_0)|^2 = W(\mu_0)\overline{W(\mu_0)} < 1$$

alors

$$\frac{1}{1 - w_0 \bar{w}_0} > 0.$$

Maintenant, démontrons que l'image  $F \circ W$  sur un disque  $D(\mu_0, r) \subset \mathbb{C} \setminus K_c$  est incluse dans le disque  $D(0,1)$  où  $r > 0$ . Afin de prouver ceci, nous devons d'abord montrer que  $F(w)$  est une transformation homographique du disque unité qui déplace  $w_0$  à 0. Soit  $w = x + y\mathbf{i}$  et  $w_0 = a + b\mathbf{i}$ . Si  $|w| < 1$ , montrons que  $|F(w)| < 1$ .

$$\begin{aligned} |F(w)| < 1 &\iff |F(w)|^2 < 1 \\ &\iff \frac{|w - w_0|^2}{|1 - w\bar{w}_0|^2} < 1 \\ &\iff (x^2 + y^2) + (a^2 + b^2) - 2ax - 2by < 1 + (x^2 + y^2)(a^2 + b^2) - 2ax - 2by \\ &\iff (x^2 + y^2) + (a^2 + b^2) < 1 + (x^2 + y^2)(a^2 + b^2) \\ &\iff (x^2 + y^2) + (a^2 + b^2) - (x^2 + y^2)(a^2 + b^2) < 1 \\ &\iff (x^2 + y^2)(1 - a^2 - b^2) + (a^2 + b^2) < 1 \\ &\iff (x^2 + y^2)(1 - a^2 - b^2) < (1 - a^2 - b^2) \\ &\iff (x^2 + y^2) < 1 \iff |w|^2 < 1 \iff |w| < 1 \end{aligned}$$

qui est notre hypothèse de départ. Si  $|w| = 1$ , montrons que  $|F(w)| = 1$ . Puisque si  $|w| = 1$ , alors  $\frac{1}{w} = \bar{w}$  et nous avons

$$|F(w)| = \frac{|w - w_0|}{|1 - w\bar{w}_0|} = \frac{|w||1 - \bar{w}w_0|}{|1 - w\bar{w}_0|} = 1.$$

Il reste à montrer que l'image de  $D(\mu_0, r)$  par  $W(\mu) = \frac{1}{\phi(\mu)}$  est incluse dans le disque  $D(0,1)$ . Par définition,

$$\phi_c : \mathbb{C} \setminus K_c \rightarrow \mathbb{C} \setminus \bar{D}$$

mais

$$h(z) = \frac{1}{z} : \mathbb{C} \setminus \bar{D} \rightarrow D$$

donc

$$W : \mathbb{C} \setminus \overline{D} \rightarrow D.$$

Ainsi, comme  $D(\mu_0, r) \subset \mathbb{C} \setminus K_c$  on obtient que  $W(D(\mu_0, r)) \subset D(0, 1)$ . Nous pouvons maintenant démontrer la formule pour la borne supérieure. Soit  $r_0$  la distance de  $\mu_0$  à l'ensemble de Julia  $K_c$ . Pour tout  $\mu$  tel que  $|\mu - \mu_0| < r_0$ , nous avons  $|F(W(\mu))| < 1$  et  $F(W(\mu_0)) = 0$ . Ainsi, par le lemme 4.2.5,

$$|[F(W(\mu_0))]'| = |F'(W(\mu_0))W'(\mu_0)| < \frac{1}{r_0}.$$

C'est-à-dire,

$$r_0 < \frac{1}{|F'(W(\mu_0))W'(\mu_0)|} = \frac{1 - w_0\overline{w_0}}{|W'(\mu_0)|},$$

et  $W'(\mu_0) = \frac{-\phi'_c(\mu_0)}{[\phi_c(\mu_0)]^2} \neq 0$  car  $\phi_c(\mu_0) \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$  et  $\phi_c$  est biholomorphe ce qui implique que  $\phi'_c \neq 0$  sur  $\mathbb{C} \setminus K_c$ . Puisque

$$|w_0| = |W(\mu_0)| = e^{-G(\mu_0)},$$

on obtient

$$1 - w_0\overline{w_0} = 1 - |w_0|^2 = 1 - e^{-2G(\mu_0)} = e^{-G(\mu_0)} 2 \sinh[G(\mu_0)].$$

De plus,

$$|W'(\mu_0)| = e^{-G(\mu_0)} \left| \frac{\phi'_c(z)}{\phi_c(z)} \right| = e^{-G(\mu_0)} |G'(\mu_0)| \text{ (voir annexe B),}$$

alors

$$r_0 < \frac{e^{-G(\mu_0)} 2 \sinh[G(\mu_0)]}{e^{-G(\mu_0)} |G'(\mu_0)|} = \frac{2 \sinh[G(\mu_0)]}{|G'(\mu_0)|}.$$

Donc, pour tout point  $z$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus K_c$ , la distance de  $z$  à l'ensemble de Julia  $K_c$  est strictement inférieure à  $\frac{2 \sinh[G(\mu_0)]}{|G'(\mu_0)|}$ .  $\square$

## 4.3 Borne inférieure aux ensembles de Julia remplis

Avec l'aide de la théorie des fonctions univalentes, nous allons démontrer la formule pour borner inférieurement la distance. Les étapes suivantes viendront à prouver le théorème  $\frac{1}{4}$  de Koebe. Ce résultat est majeur pour la borne inférieure et les applications qui en découlent.

### 4.3.1 Théorème $\frac{1}{4}$ de Koebe

**Définition 4.3.1 (Univalente)** Une fonction  $f$  est dite univalente sur un ensemble  $D \subset \mathbb{C}$  si elle est injective sur  $D$ , i.e.  $f(z_1) = f(z_2)$  implique que  $z_1 = z_2$   $\forall z_1, z_2 \in D$ .

**Définition 4.3.2 (classe  $S$ )** On dit qu'une fonction analytique  $f$  est de classe  $S$  si et seulement si  $f$  est univalente dans  $D = \{z : |z| < 1\}$  et si  $f$  est telle que sa décomposition en série de Taylor autour de 0 possède la forme suivante:

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n.$$

**Définition 4.3.3 (classe  $\Sigma$ )** On dit qu'une fonction analytique  $f$  est de classe  $\Sigma$  si et seulement si  $f$  est univalente dans  $D^0 = \{z : |z| > 1\}$  et si  $f$  est telle que sa décomposition en série de Laurent autour de 0 possède la forme suivante:

$$f(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_{-n} z^{-n}.$$

**Lemme 4.3.4** Si  $f \in S$  et  $w$  est dans le complément de  $f(D)$ , alors la fonction

$$h(z) = \frac{f(z)}{1 - w^{-1}f(z)}$$

est dans  $S$ .

**Preuve.** Puisque  $f(z) \neq w$  pour  $z \in D$ , alors  $h(z)$  est analytique. Supposons que  $z_1 \neq z_2$  et que  $h(z_1) = h(z_2)$ , alors

$$\begin{aligned} \frac{f(z_1)}{1 - w^{-1}f(z_1)} &= \frac{f(z_2)}{1 - w^{-1}f(z_2)}. \\ \iff f(z_1) - w^{-1}f(z_2)f(z_1) &= f(z_2) - w^{-1}f(z_1)f(z_2). \\ \iff f(z_1) &= f(z_2). \\ \iff z_1 = z_2, &\text{ puisque } f \in S, \end{aligned}$$

c'est une contradiction. Ainsi  $h(z)$  est injective. Considérons maintenant la transformation de Möbius suivante

$$M(u) = \frac{u}{1 - w^{-1}u}.$$

Si  $u = 0$ ,

$$M(0) = \frac{0}{1 - w^{-1}0} = 0,$$

alors  $h(0) = 0$  car  $f(0) = 0$ . Puisque  $f \in S$ , alors  $f'(0) = 1$  et donc par la règle de dérivation en chaîne:

$$h'(0) = (M \circ f)'(0) = M'(f(0))f'(0) = 1.$$

Donc, la décomposition en série de Taylor de  $h(z)$  est de la forme suivante:

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

et  $h(z) \in S$ .  $\square$

**Lemme 4.3.5** *Si  $f \in S$ , alors la fonction*

$$g(z) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)}$$

*est dans  $\Sigma$ .*

**Preuve.** Puisque  $z \in D^0$ , alors  $f(z^{-1}) \neq 0$  et  $g(z)$  est analytique dans  $D^0$ . Si  $g(z_1) = g(z_2)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(\frac{1}{z_1})} &= \frac{1}{f(\frac{1}{z_2})} \\ \iff f(\frac{1}{z_1}) &= f(\frac{1}{z_2}) \\ \iff z_1 &= z_2 \end{aligned}$$

car  $f \in S$  et donc  $g(z)$  est injective. En utilisant la définition de  $f(\frac{1}{z})$ ,

$$g(z) = \frac{1}{\frac{1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \dots} = z - a_2 + \frac{a_2^2 - a_3}{z^2} + \dots$$

on constate que  $g(z) \in \Sigma$ .  $\square$

**Lemme 4.3.6** *Si  $f \in S$ , alors la fonction*

$$h(z) = \sqrt{f(z^2)}$$

*est dans  $S$  où le radical est la solution positive du radical de la série formelle de  $f(z^2)$ .*

*N.B. Soit  $p(z) = 1 + a_2z^2 + a_4z^4 + \dots + a_{2n}z^{2n} + \dots$ , alors le radical de la série formelle de  $p(z)$  existe toujours et sa solution positive est de la forme suivante:*

$$q(z) = 1 + \frac{a_2z^2}{2} + \left( \frac{a_4}{2} - \frac{a_2^2}{8}z^4 \right) + \dots,$$

*i.e.  $q(z)^2 = p(z)$ . De plus, il est possible de montrer que  $q(z)$  est holomorphe dans  $D$ .*

**Preuve.** En écrivant

$$\begin{aligned} h(z) &= \sqrt{f(z^2)} = z\{1 + a_2z^2 + a_3z^4 + \dots\}^{\frac{1}{2}} \\ &= z \left[ 1 + \frac{a_2z^2}{2} + \left( \frac{a_4}{2} - \frac{a_2^2}{8} \right) z^4 + \dots \right] = z + \frac{a_2z^3}{2} + \left( \frac{a_4}{2} - \frac{a_2^2}{8} \right) z^5 + \dots \end{aligned}$$

$$= z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \dots$$

On observe que  $h$  est analytique et impair, i.e.  $h(-z) = -h(z)$ . Si  $h(z_1) = h(z_2)$ ,

$$f(z_1^2) = f(z_2^2)$$

$$\iff z_1^2 = z_2^2$$

$$\iff z_1 = \pm z_2.$$

Nous avons donc deux cas:  $z_1 = z_2$  ou  $z_1 = -z_2$ . En regardant le second cas de plus près, si  $z_1 = -z_2$ , alors  $h(z_1) = h(z_2) = -h(z_1)$ . Donc  $h(z_1) = 0$  ce qui implique que  $z_1 = 0$  (car  $f \neq 0$  sur  $D \setminus \{0\}$ ) et ainsi, dans les deux cas,  $z_1 = z_2$ . Ce qui prouve que  $h(z)$  est injective et donc que  $h \in S$ .  $\square$

**Lemme 4.3.7 (Open mapping theorem)** *Soit  $f \in H(r)$  où  $r$  est un ouvert connexe et  $f$  une fonction non-constante sur  $r$ , alors  $F(r)$  est aussi un ouvert connexe du plan complexe.*

**Preuve.** Voir [22] p.214.  $\square$

**Lemme 4.3.8** *Supposons que*

- 1)  $X \subset V \subset \mathbb{R}^k$  est ouvert,  $T : V \rightarrow \mathbb{R}^k$  est continue;
- 2)  $X$  est mesurable au sens de Lebesgue,  $T$  est injective et différentiable sur  $X$ ;
- 3)  $m(T(V - X)) = 0$ ;

alors en posant  $Y = T(X)$ ,

$$\int_Y f dm = \int_X (f \circ T) |J_t| dm$$

pour chaque  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, \infty]$ .

**Preuve.** Voir [22] p.154.  $\square$

**Théorème 4.3.9 (Area Theorem)** Si  $F \in H(D \setminus \{0\})$ ,

$$F(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| z^n \quad (z \in D \setminus \{0\}).$$

alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 \leq 1.$$

**Preuve.** Le choix de  $a_0$  n'a pas d'importance car il n'intervient pas dans l'équation finale. Assumons que  $a_0 = 0$ . De plus, ni l'hypothèse de départ ni la conclusion ne sont affectées si nous remplaçons  $F(z)$  par  $\lambda F(\lambda z)$  ( $|\lambda| = 1$ ). Nous assumerons donc que  $a_1$  est réel avec  $\lambda^2 = \frac{\bar{a}_1}{|a_1|}$  lorsque  $a_1 \neq 0$ . Posons  $U_r = \{z : |z| < r\}$ ,  $C_r = \{z : |z| = r\}$ ,  $V_r = \{z : r < |z| < 1\}$ , pour  $0 < r < 1$ . Alors  $F(U_r)$  est un voisinage de  $\infty$  (par le lemme 4.3.7 sur  $1 \setminus F$ ); les ensembles  $F(U_r)$ ,  $F(C_r)$  et  $F(V_r)$  sont disjoints car  $F(z) \in \Sigma$ . Écrivons

$$F(z) = \frac{1}{z} + a_1 z + \omega(z) \tag{4.1}$$

$F = u + iv$ , et

$$A = \frac{1}{r} + a_1 r, \quad B = \frac{1}{r} - a_1 r. \tag{4.2}$$

Pour  $z = r e^{i\theta}$ , nous obtenons

$$u = A \cos(\theta) + \operatorname{Re}(\omega) \quad \text{et} \quad v = -B \sin(\theta) + \operatorname{Im}(\omega).$$

De plus,

$$\frac{u^2}{A^2} + \frac{v^2}{B^2} = 1 + \frac{2 \cos(\theta)}{A} \operatorname{Re}(\omega) + \left( \frac{\operatorname{Re}(\omega)}{A} \right)^2 - \frac{2 \sin(\theta)}{B} \operatorname{Im}(\omega) + \left( \frac{\operatorname{Im}(\omega)}{B} \right)^2.$$

Par (4.2),  $\omega$  possède un zéro d'ordre 2 ou plus à l'origine. En prenant (4.3.1) en considération nous constatons qu'il existe un  $\tau > 0$  tel que pour tout  $r$  suffisamment petit,

$$\frac{u^2}{A^2} + \frac{v^2}{B^2} < 1 + \tau r^3, \quad (z = r e^{i\theta}).$$



Ceci signifie que  $F(C_r)$  est l'intérieur de l'ellipse  $E_r$  dont les semi-axes sont

$$A\sqrt{1 + \tau r^3} \text{ et } B\sqrt{1 + \tau r^3},$$

où l'aire sera bornée de la manière suivante:

$$\pi AB(1 + \tau r^3) = \pi\left(\frac{1}{r} + \alpha_1 r\right)\left(\frac{1}{r} - \alpha_1 r\right)(1 + \tau r^3) \leq \frac{\pi}{r^2}(1 + \tau r^3). \quad (4.3)$$

Du fait que  $F(C_r)$  est à l'intérieur de  $E_r$ , nous avons que  $E_r^c \subset F(U_r)$ . De plus, puisque  $F(V_r)$  est à l'intérieur de  $E_r$ , nous obtenons que l'aire de  $F(V_r)$  n'est pas plus grande que (4.3). Les équations de Cauchy-Riemann montrent que le Jacobien de l'application  $(x,y) \rightarrow (u,v)$  est  $|F'|^2$ . Le lemme 4.3.8 nous donne le résultat suivant:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{r^2}(1 + \tau r^3) &\geq \int \int_{V_r} |F'|^2 \\ &= \int_r^1 t dt \int_0^{2\pi} \left| -t^{-2} e^{-2i\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} e^{(n-1)i\theta} \right|^2 d\theta \\ &= 2\pi \int_r^1 \left( t^{-3} + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 t^{2n-1} \right) dt \\ &= \pi \left[ r^{-2} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 (1 - r^{2n}) \right]. \end{aligned}$$

En divisant par  $\pi$  et en soustrayant  $r^{-2}$  de chaque côté nous obtenons que:

$$\sum_{n=1}^N n |a_n|^2 (1 - r^{2n}) \leq 1 + \tau r$$

pour un  $r$  suffisamment petit et pour tout entier positif  $N$ . Lorsque  $r \rightarrow 0$  et  $N \rightarrow \infty$  nous obtenons la conclusion.  $\square$

**Lemme 4.3.10** *Si  $g(z) \in \Sigma$ , alors*

$$|b_{-n}| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

**Preuve.** Par le lemme 4.3.9, pour un  $m \geq 1$

$$m|b_{-m}|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} n|b_{-n}|^2 \leq 1$$

donc

$$|b_{-m}| \leq \frac{1}{\sqrt{m}}$$

et en particulier

$$|b_{-1}| \leq 1.$$

□

**Lemme 4.3.11 (Théorème de Bieberbach)** *Si  $f \in S$ , alors  $|a_2| \leq 2$ .*

**Preuve.** Par le lemme 4.3.6

$$h(z) = \sqrt{f(z^2)} \in S.$$

Ainsi, en utilisant le lemme 4.3.5, nous obtenons que

$$g(z) = \frac{1}{h(\frac{1}{z})} = \frac{1}{\sqrt{f(\frac{1}{z^2})}} = z - \frac{a_2}{2z} + \dots$$

est dans  $\Sigma$ . Finalement, en utilisant le lemme 4.3.10, nous trouvons que  $|\frac{a_2}{2}| \leq 1$  et donc

$$|a_2| \leq 2.$$

□

**Lemme 4.3.12 (Théorème  $\frac{1}{4}$  de Koebe)** *Soit  $f \in S$ . Alors  $f(D)$  contient le disque  $|w| < \frac{1}{4}$ .*

**Preuve.** Soit  $w \in \mathbb{C} \setminus f(D)$ . Par le lemme 4.3.4, la fonction

$$h(z) = \frac{f(z)}{1 - w^{-1}f(z)}$$

est dans  $S$ . La série de Taylor de  $h$  à 0 est

$$\begin{aligned} h(z) &= (z + a_2 z^2 + \dots) \left(1 + \frac{z}{w} + \dots\right) \\ &= z + \left(a_2 + \frac{1}{w}\right) z^2 + \dots \end{aligned}$$

Par le lemme 4.3.11,

$$\left|a_2 + \frac{1}{w}\right| \leq 2$$

mais  $|a_2| \leq 2$ , alors

$$|w| \geq \frac{1}{4}.$$

Autrement dit, lorsque  $|w| < \frac{1}{4}$  cela implique que  $w \in f(D)$ . Ainsi,  $D(0, \frac{1}{4}) \subset f(D)$ . De plus, si  $F : D \rightarrow \mathbb{C}$  peut être normalisée vers  $f(z)$  avec  $F(0) = a$  et  $|F'(0)| = b$ , alors  $D(a, \frac{b}{4}) \subset F(D)$ .  $\square$

### 4.3.2 Borne inférieure

Avec l'aide du théorème  $\frac{1}{4}$  de Koebe nous pouvons maintenant démontrer la formule de la borne inférieure. Cette formule sera utilisée pour développer la borne inférieure bicomplexe. Cette borne est le résultat principal permettant la visualisation des fractales à l'aide du ray-tracing.

**Théorème 4.3.13 (Borne inférieure)** *La distance d'un point  $z \in \mathbb{C} \setminus K_c$  à  $K_c$  est strictement supérieure à  $\frac{\sinh[G(z)]}{2e^{G(z)}|G'(z)|}$ .*

**Preuve.** Soit  $\phi$ , une application biholomorphe

$$\phi_c : \mathbb{C} \setminus K_c \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{D}$$

où  $D = \{z \mid |z| < 1\}$ . Soit  $r(z) = \frac{1}{z}$ , alors

$$r \circ \phi : \mathbb{C} \setminus K_c \rightarrow D \setminus \{0\}.$$

Ainsi,  $\forall c_0 \in \mathbb{C} \setminus K_c$ ,

$$d := r(\phi_c(c_0)) = \frac{1}{\phi_c(c_0)} \in D \setminus \{0\}.$$

Soit  $m_d(z)$  la transformation de Möbius définie de la manière suivante:

$$m_d(z) = \frac{z - d}{1 - \bar{d}z}.$$

Grâce à  $m_d(z)$ , nous pouvons transformer un disque unité arbitraire, centré en zéro, en un disque unité centré en zéro où  $d$  est déplacé en 0 et 0 en  $-d$  (voir la preuve du théorème 4.2.6). Définissons  $\omega$  comme

$$\omega(z) := (m_d \circ r \circ \phi_c)^{-1}(|d|z).$$

Montrons que  $\omega$  est univalente sur le disque unité. Puisque

$$m_d \circ r \circ \phi_c : \mathbb{C} \setminus K_c \rightarrow D \setminus \{-d\}$$

nous avons que

$$\omega : D \rightarrow \mathbb{C} \setminus K_c, \text{ car } |d| < 1 \text{ et } \left| \frac{-d}{|d|} \right| = 1$$

et  $\omega$  applique 0 à  $c_0$ , i.e.

$$\omega(0) = c_0.$$

Prouvons

$$|\omega'(0)| := R = \frac{|\phi_c^2(c_0)| - 1}{|\phi_c'(c_0)|}.$$

Puisque

$$(m_d \circ r \circ \phi_c)(z) = \frac{\frac{1}{\phi_c(z)} - d}{1 - \bar{d}\frac{1}{\phi_c(z)}} = \frac{1 - d\phi_c(z)}{\phi_c(z) - \bar{d}},$$

et

$$\begin{aligned} (m_d \circ r \circ \phi_c)'(z) &= \frac{-d\phi_c'(z)(\phi_c(z) - \bar{d}) - \phi_c'(z)(1 - d\phi_c(z))}{(\phi_c(z) - \bar{d})^2} \\ &= \frac{\phi_c'(z)(-d\phi_c(z) + |d|^2 - 1 + d\phi_c(z))}{(\phi_c(z) - \bar{d})^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\phi'_c(z)(|d|^2 - 1)}{(\phi_c(z) - \bar{d})^2}.$$

En évaluant à  $c_0$  nous obtenons que:

$$\frac{\phi'_c(c_0)(|d|^2 - 1)}{(\phi_c(c_0) - \bar{d})^2} = \frac{\phi'_c(c_0)(|d|^2 - 1)}{(\frac{1}{d} - \bar{d})^2} = \frac{\phi'_c(c_0)d^2}{|d|^2 - 1}.$$

Donc en posant  $z = \frac{c_0}{|d|}$ ,

$$\left| \frac{d(\omega(z))}{dz} \right| = \left| \frac{d((m_d \circ r \circ \phi_c)^{-1}(z))}{dz} \right| = \frac{1 - |d|^2}{|\phi'_c(c_0)||d|^2} = \frac{|\phi_c^2(c_0)| - 1}{|\phi'_c(c_0)|}.$$

Finalement, en utilisant le lemme 4.3.12,

$$D\left(c_0, \frac{R}{4}\right) \subset \omega(D) = \mathbb{C} \setminus K_c.$$

Ainsi, la distance de  $c_0$  à  $K_c$  est

$$d(c_0, K_c) > \frac{R}{4} = \frac{\sinh[G(z)]}{2e^{G(z)}|G'(z)|}$$

par la preuve du théorème 4.2.6.  $\square$

## 4.4 Bornes à l'ensemble de Mandelbrot

Maintenant que nous possédons les bornes de la distance aux ensembles de Julia, il est possible d'utiliser ce résultat pour trouver les bornes de distance à l'ensemble de Mandelbrot.

**Théorème 4.4.1** *Il existe une application biholomorphe  $\psi$  telle que*

$$\psi : \mathbb{C} \setminus M \rightarrow \mathbb{C} \setminus \bar{D}$$

**Preuve.** Soit  $f_c(z) = z^2 + c$  et  $f_0(z) = z^2$  et soit  $\phi$ , une application biholomorphe

$$\phi_c : \bar{\mathbb{C}} \setminus K_c \rightarrow \bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{D}$$

A. Douady et J. H. Hubbard ont remarqué que  $\phi_c$  peut être choisi de sorte que

$$\phi_c \circ f_c \circ \phi_c^{-1} = f_0 \text{ (en particulier } \phi_c(\infty) = \infty).$$

Cette remarque s'applique pour  $z = c$  et en posant  $\psi(c) := \phi_c(c)$  nous obtenons

$$\psi : \mathbb{C} \setminus M \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{D}.$$

Voir [5] et [15] pour les détails concernant ce sujet.  $\square$

**Corollaire 4.4.2** *La distance d'un point  $z$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus M$ , à  $M$  est strictement inférieure à  $\frac{2 \sinh[G(z)]}{|G'(z)|}$  où  $G(z)$  est le potentiel au point  $z$ . C'est-à-dire*

$$d(z, M) < \frac{2 \sinh[G(z)]}{|G'(z)|}.$$

**Preuve.** Il suffit d'utiliser l'application biholomorphe du théorème 4.4.1,

$$\psi : \mathbb{C} \setminus M \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{D}$$

dans le théorème 4.2.6 pour avoir la formule.  $\square$

**Corollaire 4.4.3** *La distance d'un point  $z$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus M$ , à  $M$  est strictement supérieure à  $\frac{\sinh G(z)}{2e^{G(z)}|G'(z)|}$  où  $G(z)$  est le potentiel au point  $z$ . C'est-à-dire*

$$d(z, M) > \frac{\sinh G(z)}{2e^{G(z)}|G'(z)|}.$$

**Preuve.** Il suffit d'utiliser l'application biholomorphe du théorème 4.4.1,

$$\psi : \mathbb{C} \setminus M \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{D}$$

dans le théorème 4.3.13 pour avoir la formule.  $\square$

## 4.5 Estimation des bornes aux ensembles de Julia remplis

Nous avons déjà les formules pour borner la distance aux ensembles de Julia, mais l'application  $\phi$ , nécessaire à leur calcul, n'est pas toujours disponible. Il faut donc estimer ces bornes. Les théorèmes suivants fournissent l'alternative nécessaire pour ces calculs.

**Théorème 4.5.1 (Potentiel électrostatique  $G$  de  $K_c$ )** *Le potentiel électrostatique  $G$  d'un point  $z$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus K_c$  peut être approximé par:*

$$G(z) = \ln |z| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln \left| 1 + \frac{c}{(f_c^{n-1}(z))^2} \right|$$

où  $f_c^{on}(z)$  est l'itération de  $f_c(z) = z^2 + c$ .

**Preuve.** Soit  $f_c(z) = z^2 + c$  et  $f_0(z) = z^2$  et soit  $\phi$ , une application biholomorphe

$$\phi_c : \overline{\mathbb{C}} \setminus K_c \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$$

comme mentionné dans le théorème 4.4.1,  $\phi_c$  peut être choisi de sorte que

$$\phi_c \circ f_c \circ \phi_c^{-1} = f_0.$$

Puisque

$$f_c(z) = \phi_c^{-1}(f_0(\phi_c(z))) = \phi_c^{-1}(\phi_c(z)^2),$$

alors

$$\phi_c(f_c(z)) = \phi_c(z)^2.$$

Nous constatons que sur  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$ , le potentiel  $G(z) := \ln |\phi_c(z)|$  double à chaque itération, ce qui implique que:

$$G(z) = \frac{G(f_c(z))}{2} = \dots = \frac{G(f_c^{on}(z))}{2^n}.$$

De plus, quand  $n \rightarrow \infty$ ,

$$G(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |f_c^{on}(z)|}{2^n}$$

car  $\phi_c(f_c^{on}(z)) \approx f_c^{on}(z)$  lorsque  $n$  est grand (voir [2]). En utilisant  $f_c^{on}(z) = (f_c^{n-1}(z))^2 + c$  et par le fait que

$$\begin{aligned} \frac{\ln |f_c^{on}(z)|}{2^n} &= \frac{\ln |(f_c^{n-1}(z))^2 + c|}{2^n} \\ &= \frac{\ln |(f_c^{n-1}(z))^2 (1 + \frac{c}{(f_c^{n-1}(z))^2})|}{2^n} = \frac{\ln |(f_c^{n-1}(z))^2|}{2^{n-1}} + \frac{\ln |1 + \frac{c}{(f_c^{n-1}(z))^2}|}{2^n} \end{aligned}$$

alors

$$G(z) = \ln |z| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln \left| 1 + \frac{c}{(f_c^{n-1}(z))^2} \right|.$$

□

**Théorème 4.5.2** *La formule de distance d'un point  $z$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus K_c$*

$$\frac{\sinh[G(z)]}{2e^{G(z)}|G'(z)|} < d(z, K_c) < \frac{2 \sinh[G(z)]}{|G'(z)|}, \quad (4.4)$$

où  $G(z)$  est le potentiel au point  $z$ , peut être estimée de la manière suivante:

$$\frac{|z_n|}{2|z_n|^{\frac{1}{2^n}}|z'_n|} < d(z, K_c) < \frac{2|z_n| \ln |z_n|}{|z'_n|}. \quad (4.5)$$

**Preuve.** Posons  $z_n = f_c^{on}(z_0)$  avec  $z_0 := z$  et  $z'_n := \frac{d}{dz}[f_c^{on}(z)]|_{z=z_0}$ . Par le théorème 4.5.1,

$$G(z) = G(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |f_c^{on}(z_0)|}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |z_n|}{2^n} \approx \frac{\ln |z_n|}{2^n}$$

pour  $n$  grand, alors

$$|G'(z)| \approx \frac{|z'_n|}{2^n |z_n|} \quad (\text{voir annexe B})$$

et

$$e^{G(z)} \approx e^{\frac{\ln |z_n|}{2^n}} = |z_n|^{\frac{1}{2^n}}.$$



Notons que  $\sinh(z) \approx z$  quand  $z$  est près de 0 et  $G(z) \rightarrow 0$  lorsque  $z$  est proche de  $K_c$  (voir [2] chapitre 9.10). Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{2 \sinh[G(z)]}{|G'(z)|} &\approx \frac{|G(z)|}{|G'(z)|} \\ &\approx \frac{\ln |z_n| 2^n}{(|z'_n|/|z_n|)2^n} = \frac{2|z_n| \ln |z_n|}{|z'_n|} \end{aligned}$$

et

$$\frac{\sinh[G(z)]}{2e^{G(z)}|G'(z)|} \approx \frac{|G(z)|}{2|G'(z)|e^{G(z)}} \approx \frac{|z_n| \ln |z_n|}{2|z_n|^{\frac{1}{2^n}}|z'_n|}$$

pour  $n$  grand.  $\square$

## 4.6 Estimation des bornes à l'ensemble de Mandelbrot

Il n'existe pas encore d'estimation pour les bornes de distance à l'ensemble de Mandelbrot. Le problème étant qu'il est encore impossible d'approximer la fonction de potentiel de cet ensemble comme effectué ci-dessus. Par contre, tel que mentionné dans [13], l'estimation des bornes de distance des ensembles de Julia donne d'excellents résultats pour l'ensemble de Mandelbrot.

Dans le chapitre 6, nous expliquerons comment valider cette affirmation de façon empirique. De plus, le lecteur pourra se convaincre, en comparant les images générées (Fig. 1, 2 et 3) avec celles dans [18], que les résultats sont concluants.

# Chapitre 5

## Bornes de la distance à l'ensemble de Mandelbrot généralisé

Les théorèmes qui suivent sont totalement inédits. Ils fournissent des formules pour borner la distance aux ensembles de Julia et Mandelbrot généralisés. Grâce à l'analyse bicomplexe, il est possible d'adapter les formules de distance complexes au cas bicomplexe. Avant de débiter, nous allons définir les ensembles suivants (voir [20]):

**Définition 5.0.1 (Ensemble de Mandelbrot généralisé  $\mathcal{M}_2$ )** *Pour tout  $c \in \mathbb{T}$ , nous associons l'application  $P_c(w) = w^2 + c$ . Si l'itération de  $P_c(w)$  appliquée à 0 ne converge pas vers l'infini alors  $c \in \mathcal{M}_2$ , i.e.*

$$\mathcal{M}_2 = \{c \in \mathbb{T} : P_c^{o_n}(0) \not\rightarrow \infty \text{ lorsque } n \rightarrow \infty\}.$$

*Cet ensemble est appelé l'ensemble de Mandelbrot généralisé.*

**Définition 5.0.2 (Ensemble de Julia remplis généralisé  $\mathcal{K}_{2,c}$ )** *Soit l'application  $P_c : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ ,  $P_c(w) = w^2 + c$ ,  $c \in \mathbb{T}$ . Si l'itération de  $P_c(w)$  appliquée à  $w \in \mathbb{T}$*

ne converge pas vers l'infini alors  $w \in \mathcal{K}_{2,c}$ , i.e.

$$\mathcal{K}_{2,c} = \{w \in \mathbb{T} : P_c^{on}(w) \not\rightarrow \infty \text{ lorsque } n \rightarrow \infty\}.$$

Cet ensemble est appelé l'ensemble de Julia rempli généralisé associé à  $c$ , il est fermé et connexe, ou une poussière de Cantor, ou non-connexe mais pas totalement non-connexe.

**Définition 5.0.3 (Le Tétrabrot  $\mathcal{T}$ )** Pour tout  $c \in \mathbb{T}$  de la forme  $a + b\mathbf{i}_1 + c\mathbf{i}_2 + 0\mathbf{j}$ , nous associons l'application  $P_c(w) = w^2 + c$ . Si l'itération de  $P_c(w)$  appliquée à 0 ne converge pas vers l'infini alors  $w \in \mathcal{T}$ , i.e.

$$\mathcal{T} = \{a + b\mathbf{i}_1 + c\mathbf{i}_2 + d\mathbf{j} \in \mathbb{T} : d = 0 \text{ et } P_c^{on}(0) \not\rightarrow \infty \text{ lorsque } n \rightarrow \infty\}.$$

Cet ensemble est appelé le Tétrabrot.

Notons que lorsque nous ferons référence aux ensembles de Julia généralisés (Fig. 7), il sera question uniquement des ensembles remplis et connexes.

## 5.1 Préliminaire

Afin de démontrer la version bicomplexe des distances présentées dans le chapitre précédent, nous devons définir une propriété de la distance d'un point  $w \in \mathbb{T}$  comme une fonction de deux distances dans le plan complexe (avec  $\mathbf{i}_1$ ).

**Lemme 5.1.1** Soit  $d(w, \mathcal{K}_{2,c}) = \inf\{|w - a| : a \in \mathcal{K}_{2,c}\}$  défini comme la distance "bicomplexe" de  $w = z_1 + z_2\mathbf{i}_2 \in \mathbb{T}$  à l'ensemble de Julia  $\mathcal{K}_{2,c}$  où  $c = c_1 + c_2\mathbf{i}_2 \in \mathbb{T}$ .

Alors,

$$d(w, \mathcal{K}_{2,c}) = \left[ \frac{[d(z_1 - z_2\mathbf{i}_1, \mathcal{K}_{c_1 - c_2\mathbf{i}_1})]^2 + [d(z_1 + z_2\mathbf{i}_1, \mathcal{K}_{c_1 + c_2\mathbf{i}_1})]^2}{2} \right]^{1/2}. \quad (5.1)$$

**Preuve.** Soit  $a = a_1 + a_2 \mathbf{i}_2 \in \mathcal{K}_{2,c}$ . En considérant le fait que  $\mathcal{K}_{2,c} = \mathcal{K}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{K}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$  (voir [18]), nous avons  $a_1 - a_2 \mathbf{i}_1 \in \mathcal{K}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}$  et  $a_1 + a_2 \mathbf{i}_1 \in \mathcal{K}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} |w - a| &= |(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + (z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2 - (a_1 - a_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 - (a_1 + a_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2| \\ &= |((z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) - (a_1 - a_2 \mathbf{i}_1)) \mathbf{e}_1 + ((z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) - (a_1 + a_2 \mathbf{i}_1)) \mathbf{e}_2| \\ &= \left( \frac{|(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) - (a_1 - a_2 \mathbf{i}_1)|^2 + |(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) - (a_1 + a_2 \mathbf{i}_1)|^2}{2} \right)^{1/2} \\ &\geq \left[ \frac{[d(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1, \mathcal{K}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1})]^2 + [d(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1, \mathcal{K}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1})]^2}{2} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

est une borne inférieure pour l'ensemble  $\{|w - a| : a \in \mathcal{K}_{2,c}\}$ . Maintenant, supposons que

$$\left[ \frac{[d(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1, \mathcal{K}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1})]^2 + [d(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1, \mathcal{K}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1})]^2}{2} \right]^{1/2} < d(w, \mathcal{K}_{2,c}).$$

Soit

$$\epsilon := d(w, \mathcal{K}_{2,c}) - \left[ \frac{[d(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1, \mathcal{K}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1})]^2 + [d(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1, \mathcal{K}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1})]^2}{2} \right]^{1/2} > 0.$$

Il est évident qu'il existe un entier positif  $n$  assez grand tel que

$$\begin{aligned} &\left[ \frac{[d(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1, \mathcal{K}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}) + \frac{1}{n}]^2 + [d(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1, \mathcal{K}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}) + \frac{1}{n}]^2}{2} \right]^{1/2} \\ &< \left[ \frac{[d(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1, \mathcal{K}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1})]^2 + [d(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1, \mathcal{K}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1})]^2}{2} \right]^{1/2} + \epsilon. \end{aligned}$$

Par contre, d'après la définition de l'infimum, il existe deux nombres complexes  $a_1 - a_2 \mathbf{i}_1 \in \mathcal{K}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}$  et  $a_1 + a_2 \mathbf{i}_1 \in \mathcal{K}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$  tels que

$$d(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1, \mathcal{K}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}) \leq |(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) - (a_1 - a_2 \mathbf{i}_1)| < d(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1, \mathcal{K}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}) + \frac{1}{n}$$

et

$$d(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1, \mathcal{K}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}) \leq |(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) - (a_1 + a_2 \mathbf{i}_1)| < d(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1, \mathcal{K}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}) + \frac{1}{n}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
|w - a| &< \left[ \frac{[d(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1, \mathcal{K}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}) + \frac{1}{n}]^2 + [d(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1, \mathcal{K}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}) + \frac{1}{n}]^2}{2} \right]^{1/2} \\
&< \left[ \frac{[d(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1, \mathcal{K}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1})]^2 + [d(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1, \mathcal{K}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1})]^2}{2} \right]^{1/2} + \epsilon \\
&= d(w, \mathcal{K}_{2,c})
\end{aligned}$$

est une contradiction.  $\square$

Maintenant, afin d'obtenir les bornes bicomplexes de distance, il est nécessaire de définir ce que nous appellerons le potentiel bicomplexe d'un point  $w \in \mathbb{T}$ . Tel qu'énoncé dans [4] et [13], le potentiel électrostatique à un point  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_b$  est défini comme

$$G(z) := \ln |\phi_b(z)| \in \mathbb{R}$$

où  $\phi_b : \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_b \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{B^1(0,1)}$  est biholomorphe.

**Définition 5.1.2** *Soit*

$$G_1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) = \ln |\phi_{b_1}(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)| \text{ et } G_2(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) = \ln |\phi_{b_2}(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)|$$

deux potentiels électrostatiques où  $\phi_{b_i} : \mathbb{C}(\mathbf{i}_1) \setminus \mathcal{K}_{b_i} \longrightarrow \mathbb{C}(\mathbf{i}_1) \setminus \overline{B^1(0,1)}$  est biholomorphe pour  $i = 1, 2$ . Le potentiel bicomplexe d'un point  $w = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 \in (\mathbb{C}(\mathbf{i}_1) \setminus \mathcal{K}_{b_1}) \times_e (\mathbb{C}(\mathbf{i}_1) \setminus \mathcal{K}_{b_2})$ , est défini comme:

$$G(w) := G_1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + G_2(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2 \in \mathbb{D}$$

et

$$G'(w) := G'_1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + G'_2(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2 \in \mathbb{D}.$$

Il est possible d'exprimer ce potentiel électrostatique bicomplexe de façon similaire à celui d'une variable complexe.

**Théorème 5.1.3** *Soit  $G : \mathbb{T} \setminus_e \mathcal{K}_{2,c} \longrightarrow \mathbb{D}$  un potentiel bicomplexe et  $c = (c_1 - c_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + (c_1 + c_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2$ . Alors,*

$$G(w) = \ln |\phi_c(w)|_{\mathbf{j}} \quad \forall w \in \mathbb{T}$$

où  $\phi_c : \mathbb{T} \setminus_e \mathcal{K}_{2,c} \longrightarrow \mathbb{T} \setminus_e \overline{D}(0,1)$  est biholomorphe en terme de deux variables complexes.

**Preuve.** D'après la définition 5.1.2, le potentiel bicomplexe  $G(w)$  peut être exprimé comme  $G_1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + G_2(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2$  où  $G_1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) = \ln |\phi_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)|$  et  $G_2(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) = \ln |\phi_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)|$  avec  $\phi_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1} : \mathbb{C}(\mathbf{i}_1) \setminus \mathcal{K}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1} \longrightarrow \mathbb{C}(\mathbf{i}_1) \setminus \overline{B^1}(0,1)$  et  $\phi_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1} : \mathbb{C}(\mathbf{i}_1) \setminus \mathcal{K}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1} \longrightarrow \mathbb{C}(\mathbf{i}_1) \setminus \overline{B^1}(0,1)$  qui sont deux fonctions biholomorphes d'une variable complexe. Soit

$$\begin{aligned} G(w) &= G_1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + G_2(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2 \\ &= (\ln |\phi_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)|) \mathbf{e}_1 + (\ln |\phi_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)|) \mathbf{e}_2 \\ &= \ln [|\phi_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)| \mathbf{e}_1 + |\phi_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)| \mathbf{e}_2] \\ &= \ln |\phi_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + \phi_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2|_{\mathbf{j}} \\ &= \ln |\phi_c(w)|_{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

où

$$\phi_c(w) := \phi_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + \phi_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2.$$

De plus, d'après le théorème 3.5.10,  $\phi_c$  et  $\phi_c^{-1}$  sont deux applications  $\mathbb{T}$ -holomorphes où  $\overline{D}(0,1) := \overline{B^1}(0,1) \times_e \overline{B^1}(0,1)$  et  $\mathcal{K}_{2,c} = \mathcal{K}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{K}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$  (voir [18]). En particulier,  $\phi_c$  est biholomorphe en terme de deux variables complexes.  $\square$

## 5.2 Bornes de distance aux ensembles de Julia remplis généralisés

Nous pouvons maintenant citer le résultat majeur de ce document.

**Théorème 5.2.1 (Bornes de distance à  $\mathcal{K}_{2,c}$ )** *Soit  $w_0 = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{T}$  et  $c_1 + c_2 \mathbf{i}_2 \in \mathcal{M}_2$ . Alors, la distance  $d(w_0, \mathcal{K}_{2,c})$  entre  $w_0$  à l'extérieur de  $\mathcal{K}_{2,c}$  et  $\mathcal{K}_{2,c}$  lui-même satisfait:*

(1) *Si  $w_0 \in \mathbb{T} \setminus_e \mathcal{K}_{2,c}$ ,*

$$\left| \frac{\sinh[G(w_0)]}{2e^{G(w_0)}G'(w_0)} \right| < d(w_0, \mathcal{K}_{2,c}) < \left| \frac{2 \sinh[G(w_0)]}{G'(w_0)} \right| \quad (5.2)$$

où  $G(w_0)$  est le potentiel bicomplexe au point  $w_0$ . De plus, ces bornes peuvent être approximées par

$$\left| \frac{w_n \ln |w_n|_{\mathbf{j}}}{2|w|_{\mathbf{j}}^{\frac{1}{2^n}} w'_n} \right| < d(w_0, \mathcal{K}_{2,c}) < \left| 2 \frac{w_n}{w'_n} \ln |w_n|_{\mathbf{j}} \right| \quad (5.3)$$

où  $w_n := P_c^{\text{on}}(w_0)$  et  $w'_n := \frac{d}{dw}[P_c^{\text{on}}(w)]|_{w=w_0} \forall n \in \mathbb{N}$ .

(2) *Si  $w_0 \in (\mathbb{C}(\mathbf{i}_1) \setminus \mathcal{K}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}) \times_e (\mathcal{K}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1})$ ,*

$$\frac{\sinh[G_1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)]}{2\sqrt{2}e^{G_1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)}|G'_1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)|} < d(w_0, \mathcal{K}_{2,c}) < \frac{\sqrt{2} \sinh[G_1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)]}{|G'_1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)|} \quad (5.4)$$

et ces bornes peuvent être approximées par

$$\frac{|z_{1,n} - z_{2,n} \mathbf{i}_1| \ln |z_{1,n} - z_{2,n} \mathbf{i}_1|}{2\sqrt{2}|z_{1,n} - z_{2,n} \mathbf{i}_1|^{\frac{1}{2^n}} |(z_{1,n} - z_{2,n} \mathbf{i}_1)'|} < d(w_0, \mathcal{K}_{2,c}) \quad (5.5)$$

$$d(w_0, \mathcal{K}_{2,c}) < \frac{\sqrt{2}|z_{1,n} - z_{2,n} \mathbf{i}_1|}{|(z_{1,n} - z_{2,n} \mathbf{i}_1)'_n|} \ln |z_{1,n} - z_{2,n} \mathbf{i}_1| \quad (5.6)$$

où  $z_{1,n} - z_{2,n} \mathbf{i}_1 := P_c^{\text{on}}(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)$  et  $(z_{1,n} - z_{2,n} \mathbf{i}_1)' := \frac{d}{dz}[P_c^{\text{on}}(z)]|_{z=z_1 - z_2 \mathbf{i}_1}$ .

(3) Si  $w_0 \in (\mathcal{K}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}) \times_e (\mathbb{C}(\mathbf{i}_1) \setminus \mathcal{K}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1})$ ,

$$\frac{\sinh[G_2(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)]}{2\sqrt{2}e^{G_2(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)}|G_2'(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)|} < d(w_0, \mathcal{K}_{2,c}) < \frac{\sqrt{2} \sinh[G_2(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)]}{|G_2'(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)|} \quad (5.7)$$

et ces bornes peuvent être approximées par

$$\frac{|z_{1,n} + z_{2,n} \mathbf{i}_1| \ln |z_{1,n} + z_{2,n} \mathbf{i}_1|}{2\sqrt{2}|z_{1,n} + z_{2,n} \mathbf{i}_1|^{\frac{1}{2^n}} |(z_{1,n} + z_{2,n} \mathbf{i}_1)'|} < d(w_0, \mathcal{K}_{2,c}) \quad (5.8)$$

$$d(w_0, \mathcal{K}_{2,c}) < \frac{\sqrt{2}|z_{1,n} + z_{2,n} \mathbf{i}_1|}{|(z_{1,n} + z_{2,n} \mathbf{i}_1)'|} \ln |z_{1,n} + z_{2,n} \mathbf{i}_1| \quad (5.9)$$

où  $z_{1,n} + z_{2,n} \mathbf{i}_1 := P_c^{\text{on}}(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)$  et  $(z_{1,n} + z_{2,n} \mathbf{i}_1)' := \frac{d}{dz}[P_c^{\text{on}}(z)]|_{z=z_1+z_2 \mathbf{i}_1}$ .

**Preuve.** Soit  $w_0 \in \mathbb{T} \setminus \mathcal{K}_{2,c}$ . Alors,  $w_0 \in \mathbb{T} \setminus [\mathcal{K}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{K}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}]$  et nous obtenons trois possibilités:

(1) Si  $z_1 - z_2 \mathbf{i}_1 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1) \setminus \mathcal{K}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}$  et  $z_1 + z_2 \mathbf{i}_1 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1) \setminus \mathcal{K}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$ . D'après le lemme 5.1.1, nous pouvons exprimer la distance bicomplexe en fonction de deux distances dans le plan complexe comme suit:

$$d(w_0, \mathcal{K}_{2,c}) = \left[ \frac{[d(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1, \mathcal{K}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1})]^2 + [d(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1, \mathcal{K}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1})]^2}{2} \right]^{1/2}.$$

Maintenant, en utilisant les inégalités (4.4) du théorème 4.5.2, nous obtenons les estimations suivantes:

$$\frac{\sinh[G_1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)]}{2e^{G_1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)}|G_1'(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)|} < d(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1, \mathcal{K}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}) < \frac{2 \sinh[G_1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)]}{|G_1'(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)|}$$

et

$$\frac{\sinh[G_2(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)]}{2e^{G_2(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)}|G_2'(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)|} < d(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1, \mathcal{K}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}) < \frac{2 \sinh[G_2(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)]}{|G_2'(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)|}.$$



Alors,

$$\begin{aligned}
d(w_0, \mathcal{K}_{2,c}) &< \left[ \frac{\left( \left| \frac{2 \sinh[G_1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)]}{G'_1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)} \right| \right)^2 + \left( \left| \frac{2 \sinh[G_2(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)]}{G'_2(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)} \right| \right)^2}{2} \right]^{1/2} \\
&= \left| \frac{2 \sinh[G_1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)]}{G'_1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)} \mathbf{e}_1 + \frac{2 \sinh[G_2(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)]}{G'_2(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)} \mathbf{e}_2 \right| \\
&= \left| \frac{2 \sinh[G_1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)] \mathbf{e}_1 + 2 \sinh[G_2(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)] \mathbf{e}_2}{G'_1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + G'_2(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2} \right| \\
&= \left| \frac{2 \sinh[G(w_0)]}{G'(w_0)} \right|
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
d(w_0, \mathcal{K}_{2,c}) &> \left[ \frac{\left( \left| \frac{\sinh[G_1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)]}{2e^{G_1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)} G'_1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)} \right| \right)^2 + \left( \left| \frac{\sinh[G_2(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)]}{2e^{G_2(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)} G'_2(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)} \right| \right)^2}{2} \right]^{1/2} \\
&= \left| \frac{\sinh[G_1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)]}{2e^{G_1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)} G'_1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)} \mathbf{e}_1 + \frac{\sinh[G_2(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)]}{2e^{G_2(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)} G'_2(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)} \mathbf{e}_2 \right| \\
&= \left| \frac{\sinh[G_1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)] \mathbf{e}_1 + \sinh[G_2(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)] \mathbf{e}_2}{2e^{G_1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)} G'_1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + 2e^{G_2(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)} G'_2(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2} \right| \\
&= \left| \frac{\sinh[G(w_0)]}{2e^{G(w_0)} G'(w_0)} \right|.
\end{aligned}$$

De plus, d'après les inégalités (4.5) du théorème 4.5.2, nous obtenons les approximations suivantes:

$$\begin{aligned}
d(w_0, \mathcal{K}_{2,c}) &< \left[ \frac{2 \frac{z_{1,n} - z_{2,n} \mathbf{i}_1}{(z_{1,n} - z_{2,n} \mathbf{i}_1)'} \ln(|z_{1,n} - z_{2,n} \mathbf{i}_1|)^2 + 2 \frac{z_{1,n} + z_{2,n} \mathbf{i}_1}{(z_{1,n} + z_{2,n} \mathbf{i}_1)'} \ln(|z_{1,n} + z_{2,n} \mathbf{i}_1|)^2}{2} \right]^{1/2} \\
&= \left| \frac{2 \frac{z_{1,n} - z_{2,n} \mathbf{i}_1}{(z_{1,n} - z_{2,n} \mathbf{i}_1)'} \ln(|z_{1,n} - z_{2,n} \mathbf{i}_1|) \mathbf{e}_1 + 2 \frac{z_{1,n} + z_{2,n} \mathbf{i}_1}{(z_{1,n} + z_{2,n} \mathbf{i}_1)'} \ln(|z_{1,n} + z_{2,n} \mathbf{i}_1|) \mathbf{e}_2}{2 \frac{(z_{1,n} - z_{2,n} \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + (z_{1,n} + z_{2,n} \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2}{(z_{1,n} - z_{2,n} \mathbf{i}_1)' \mathbf{e}_1 + (z_{1,n} + z_{2,n} \mathbf{i}_1)' \mathbf{e}_2} [\ln(|z_{1,n} - z_{2,n} \mathbf{i}_1|) \mathbf{e}_1 + \ln(|z_{1,n} + z_{2,n} \mathbf{i}_1|) \mathbf{e}_2]} \right| \\
&= \left| \frac{2 \frac{(z_{1,n} - z_{2,n} \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + (z_{1,n} + z_{2,n} \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2}{(z_{1,n} - z_{2,n} \mathbf{i}_1)' \mathbf{e}_1 + (z_{1,n} + z_{2,n} \mathbf{i}_1)' \mathbf{e}_2} [\ln(|z_{1,n} - z_{2,n} \mathbf{i}_1|) \mathbf{e}_1 + \ln(|z_{1,n} + z_{2,n} \mathbf{i}_1|) \mathbf{e}_2]}{2 \frac{w_n}{w_n'} \ln |w_n|} \right| \\
&= \left| \frac{2 \frac{w_n}{w_n'} \ln |w_n|}{2 \frac{w_n}{w_n'} \ln |w_n|} \right|
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
d(w_0, \mathcal{K}_{2,c}) &> \left[ \frac{\frac{(z_{1,n}-z_{2,n}\mathbf{i}_1) \ln(|z_{1,n}-z_{2,n}\mathbf{i}_1|)}{2|z_{1,n}-z_{2,n}\mathbf{i}_1|^{\frac{1}{2^n}} (z_{1,n}-z_{2,n}\mathbf{i}_1)'} + \frac{(z_{1,n}+z_{2,n}\mathbf{i}_1) \ln(|z_{1,n}+z_{2,n}\mathbf{i}_1|)}{2|z_{1,n}+z_{2,n}\mathbf{i}_1|^{\frac{1}{2^n}} (z_{1,n}+z_{2,n}\mathbf{i}_1)'}}{2} \right]^{1/2} \\
&= \left| \frac{(z_{1,n}-z_{2,n}\mathbf{i}_1) \ln(|z_{1,n}-z_{2,n}\mathbf{i}_1|)}{2|z_{1,n}-z_{2,n}\mathbf{i}_1|^{\frac{1}{2^n}} (z_{1,n}-z_{2,n}\mathbf{i}_1)'} \mathbf{e}_1 + \frac{(z_{1,n}+z_{2,n}\mathbf{i}_1) \ln(|z_{1,n}+z_{2,n}\mathbf{i}_1|)}{2|z_{1,n}+z_{2,n}\mathbf{i}_1|^{\frac{1}{2^n}} (z_{1,n}+z_{2,n}\mathbf{i}_1)'} \mathbf{e}_2 \right| \\
&= \left| \frac{((z_{1,n}-z_{2,n}\mathbf{i}_1) \ln(|z_{1,n}-z_{2,n}\mathbf{i}_1|) \mathbf{e}_1 + (z_{1,n}+z_{2,n}\mathbf{i}_1) \ln(|z_{1,n}+z_{2,n}\mathbf{i}_1|) \mathbf{e}_2)}{2(|z_{1,n}-z_{2,n}\mathbf{i}_1| \mathbf{e}_1 + |z_{1,n}+z_{2,n}\mathbf{i}_1| \mathbf{e}_2)^{\frac{1}{2^n}} ((z_{1,n}-z_{2,n}\mathbf{i}_1)' \mathbf{e}_1 + (z_{1,n}+z_{2,n}\mathbf{i}_1)' \mathbf{e}_2)} \right| \\
&= \left| \frac{w_n \ln |w_n|_{\mathbf{j}}}{2|w|_{\mathbf{j}}^{\frac{1}{2^n}} w'_n} \right|
\end{aligned}$$

où  $w_n := P_c^{\circ n}(w_0) = P_{c_1-c_2\mathbf{i}_1}^{\circ n}(z_1 - z_2\mathbf{i}_1)\mathbf{e}_1 + P_{c_1+c_2\mathbf{i}_1}^{\circ n}(z_1 + z_2\mathbf{i}_1)\mathbf{e}_2$  et

$$\begin{aligned}
w'_n &:= \frac{d}{dw} [P_c^{\circ n}(w)]|_{w=w_0} = \frac{d}{dz} [P_{c_1-c_2\mathbf{i}_1}^{\circ n}(z)]|_{z=z_1-z_2\mathbf{i}_1} \mathbf{e}_1 \\
&\quad + \frac{d}{dz} [P_{c_1+c_2\mathbf{i}_1}^{\circ(n)}(z)]|_{z=z_1+z_2\mathbf{i}_1} \mathbf{e}_2
\end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$  (voir théorème 3.5.10).

(2) Si  $z_1 - z_2\mathbf{i}_1 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1) \setminus \mathcal{K}_{c_1-c_2\mathbf{i}_1}$  et  $z_1 + z_2\mathbf{i}_1 \in \mathcal{K}_{c_1+c_2\mathbf{i}_1}$ . Dans ce cas,  $d(z_1 + z_2\mathbf{i}_1, \mathcal{K}_{c_1+c_2\mathbf{i}_1}) = 0$ . Par conséquent, du lemme 5.1.1 nous pouvons exprimer la distance bicomplexe comme une distance dans le plan complexe de la façon suivante:

$$d(w_0, \mathcal{K}_{2,c}) = \frac{d(z_1 - z_2\mathbf{i}_1, \mathcal{K}_{c_1-c_2\mathbf{i}_1})}{\sqrt{2}}.$$

En utilisant les inégalités (4.4) et (4.5), du théorème 4.5.2, nous obtenons le résultat.

(3) Si  $z_1 - z_2\mathbf{i}_1 \in \mathcal{K}_{c_1-c_2\mathbf{i}_1}$  et  $z_1 + z_2\mathbf{i}_1 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1) \setminus \mathcal{K}_{c_1+c_2\mathbf{i}_1}$ . Ce cas est similaire au cas (2).  $\square$

### 5.3 Bornes de la distance à l'ensemble de Mandelbrot généralisé

Comme nous l'avons démontré dans la section 4.4, les formules (4.4) du théorème 4.5.2 fonctionnent aussi pour l'ensemble de Mandelbrot en utilisant le potentiel respectif à cet ensemble. Par conséquent, d'après le fait que  $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1 \times_e \mathcal{M}_1$  (voir [18]) où  $\mathcal{M}_1 := \{b \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1) : P_b^{on}(0) \not\rightarrow \infty \text{ lorsque } n \rightarrow \infty\}$  il est simple d'obtenir la formule d'estimation de la distance pour  $\mathcal{M}_2$ .

**Théorème 5.3.1 (Borne de la distance à  $\mathcal{M}_2$ )** *Soit  $w_0 = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{T}$ . Alors, la distance  $d(w_0, \mathcal{M}_2)$  entre  $w_0$  à l'extérieur de  $\mathcal{M}_2$  et  $\mathcal{M}_2$  lui-même satisfait:*

(1) *Si  $w_0 \in \mathbb{T} \setminus_e \mathcal{M}_2$ ,*

$$\left| \frac{\sinh[G(w_0)]}{2e^{G(w_0)} G'(w_0)} \right| < d(w_0, \mathcal{M}_2) < \left| \frac{2 \sinh[G(w_0)]}{G'(w_0)} \right| \quad (5.10)$$

*où  $G(w_0)$  est le potentiel bicomplexe au point  $w_0$  construit à l'aide de deux potentiels,  $G_1$  et  $G_2$ , de l'ensemble de Mandelbrot.*

(2) *Si  $w_0 \in (\mathbb{C}(\mathbf{i}_1) \setminus \mathcal{M}_1) \times_e \mathcal{M}_1$ ,*

$$\frac{\sinh[G_1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)]}{2\sqrt{2}e^{G_1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)} |G_1'(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)|} < d(w_0, \mathcal{M}_2) < \frac{\sqrt{2} \sinh[G_1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)]}{|G_1'(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)|}. \quad (5.11)$$

(3) *Si  $w_0 \in \mathcal{M}_1 \times_e (\mathbb{C}(\mathbf{i}_1) \setminus \mathcal{M}_1)$ ,*

$$\frac{\sinh[G_2(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)]}{2\sqrt{2}e^{G_2(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)} |G_2'(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)|} < d(w_0, \mathcal{M}_2) < \frac{\sqrt{2} \sinh[G_2(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)]}{|G_2'(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)|}. \quad (5.12)$$

**Preuve.** Cette preuve est similaire à la preuve du théorème 5.2.1. Par contre, dans ce cas, le potentiel bicomplexe utilise le potentiel électrostatique des points se situant à l'extérieur de l'ensemble de Mandelbrot (voir [4] et [13]).

De plus, il est bien connu (voir [13]) que, de façon expérimentale, les formules (4.5) du théorème 4.5.2 donnent de très bons résultats pour l'ensemble de Mandelbrot. Par conséquent, en utilisant la technique du théorème 5.2.1, nous pouvons obtenir les formules suivantes (d'approximation expérimentales pour  $\mathcal{M}_2$ ):

(1) Si  $w_0 \in \mathbb{T} \setminus_e \mathcal{M}_2$ , les bornes de la distance peuvent être approximées par

$$\left| \frac{w_n \ln |w_n|_j}{2|w_j|^{\frac{1}{2^n}} w'_n} \right| < d(w_0, \mathcal{M}_2) < \left| 2 \frac{w_n}{w'_n} \ln |w_n|_j \right| \quad (5.13)$$

où  $w_n := P_{w_0}^{on}(0)$  et  $w'_n := \frac{d}{dw}[P_w^{on}(0)]|_{w=w_0} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

(2) Si  $w_0 \in (\mathbb{C}(\mathbf{i}_1) \setminus \mathcal{M}_1) \times_e \mathcal{M}_1$ , les bornes de la distance peuvent être approximées par

$$\frac{|z_{1,n} - z_{2,n}\mathbf{i}_1| \ln |z_{1,n} - z_{2,n}\mathbf{i}_1|}{2\sqrt{2}|z_{1,n} - z_{2,n}\mathbf{i}_1|^{\frac{1}{2^n}} |(z_{1,n} - z_{2,n}\mathbf{i}_1)'|} < d(w_0, \mathcal{M}_2) \quad (5.14)$$

$$d(w_0, \mathcal{M}_2) < \frac{\sqrt{2}|z_{1,n} - z_{2,n}\mathbf{i}_1|}{|(z_{1,n} - z_{2,n}\mathbf{i}_1)'_n|} \ln |z_{1,n} - z_{2,n}\mathbf{i}_1| \quad (5.15)$$

où  $z_{1,n} - z_{2,n}\mathbf{i}_1 := P_{z_1 - z_2\mathbf{i}_1}^{on}(0)$  et  $(z_{1,n} - z_{2,n}\mathbf{i}_1)' := \frac{d}{dz}[P_z^{on}(0)]|_{z=z_1 - z_2\mathbf{i}_1}$ .

(3) Si  $w_0 \in \mathcal{M}_1 \times_e (\mathbb{C}(\mathbf{i}_1) \setminus \mathcal{M}_1)$ , les bornes de la distance peuvent être approximées par

$$\frac{|z_{1,n} + z_{2,n}\mathbf{i}_1| \ln |z_{1,n} + z_{2,n}\mathbf{i}_1|}{2\sqrt{2}|z_{1,n} + z_{2,n}\mathbf{i}_1|^{\frac{1}{2^n}} |(z_{1,n} + z_{2,n}\mathbf{i}_1)'|} < d(w_0, \mathcal{M}_2). \quad (5.16)$$

$$d(w_0, \mathcal{M}_2) < \frac{\sqrt{2}|z_{1,n} + z_{2,n}\mathbf{i}_1|}{|(z_{1,n} + z_{2,n}\mathbf{i}_1)'_n|} \ln |z_{1,n} + z_{2,n}\mathbf{i}_1| \quad (5.17)$$

où  $z_{1,n} + z_{2,n}\mathbf{i}_1 := P_{z_1+z_2\mathbf{i}_1}^{\circ n}(0)$  et  $(z_{1,n} + z_{2,n}\mathbf{i}_1)' := \frac{d}{dz}[P_z^{\circ n}(0)]|_{z=z_1+z_2\mathbf{i}_1}$ .  $\square$

# Chapitre 6

## Ray-Tracing pour les fractales bicomplexes

### 6.1 Introduction

Le ray-tracing est une méthode simple dont le fonctionnement est similaire à celui de l'oeil humain. Elle fut popularisée durant les dernières années par les fanatiques du réalisme des images de synthèse. La capacité de calcul des ordinateurs d'aujourd'hui et les logiciels gratuits comme POV-RAY ont aussi aidé à répandre l'usage de la technique.

Pour les fractales en trois dimensions, le ray-tracing apporte une solution élégante à plusieurs problèmes. En effet, l'algorithme d'échappement utilisé dans [18] nécessite beaucoup de temps de calcul. Le ray-tracing est rapide, offre des images réalistes et permet d'explorer facilement les fractales.

Le principe du ray-tracing est de simuler la réalité des phénomènes optiques:

ombrage, réflexion, réfraction et perspective. La technique consiste à suivre chaque rayon lumineux de la scène qui arrive dans l'oeil de l'observateur en passant par un pixel de l'écran. Le suivi des rayons se fait à partir de l'oeil de l'observateur, en partant du principe que le sens d'un rayon lumineux n'a pas d'importance. Les rayons issus de l'oeil rencontrent, en général, un objet de la scène. Il reste donc à déterminer la lumière reçue au point d'intersection.

## 6.2 Problématique

Nous voulons utiliser le ray-tracing pour générer des images de nos fractales, mais un problème évident nous empêche d'utiliser cette méthode sans modification. Par définition, nous ne pouvons déterminer l'emplacement exact d'un point faisant partie de la frontière d'un de nos ensembles. Alors, il est impossible de trouver l'intersection entre un rayon et la bordure fractale.

Dans notre cas, pour les ensembles de Mandelbrot et Julia remplis généralisés, il est tout de même possible de savoir si un point est à l'intérieur ou à l'extérieur de l'ensemble. Avec ce fait, il serait possible de vérifier, à certains intervalles sur le rayon, si nous avons atteint l'ensemble. Par contre, des parties de la structure fractale peuvent se trouver à l'intérieur d'un intervalle et donc, le rayon traverserait l'ensemble. Si nous diminuons la taille des intervalles, il n'est pas garanti que ce problème sera réglé et de plus, le temps de calcul augmenterait énormément.

La formule de distance vient solutionner ce problème. En connaissant à tout moment la borne inférieure de la distance, il est impossible qu'un rayon traverse la fractale. Nous allons donc montrer comment utiliser les résultats du chapitre précédent dans un logiciel de ray-tracing pour générer des images des fractales

bicomplexes. Nous ne présenterons pas le fonctionnement du ray-tracing car c'est un sujet simple et très documenté (voir [8]).

### 6.3 Ray-Tracing pour les ensembles de Julia remplis bicomplexes

Dans cette section, nous décrirons comment utiliser le ray-tracing pour les ensembles de Julia remplis généralisés dans  $\mathbb{R}^4$ . Les considérations supplémentaires pour obtenir les résultats dans  $\mathbb{R}^3$ , ainsi que celles pour l'ensemble de Mandelbrot bicomplexe, sont fournies dans la section suivante.

Il est décrit dans [4] et [9] comment utiliser des estimations des bornes de distance en conjonction avec le ray-tracing pour produire des images de fractales déterministiques. Nous présentons, ici, sensiblement la même méthode, mais d'une façon qui est mathématiquement plus rigoureuse.

Soit

$$B_{\mathbb{R}^4}(w_0, r) = \{w \in \mathbb{R}^4 : |w - w_0| < r\} \text{ ou } w_0 \in \mathbb{R}^4.$$

La borne inférieure de la distance, notée  $D_l$ , garantit que pour tout vecteur quadridimensionnel  $w \in \mathbb{C}^2 \setminus K_{2,c}$ , la boule  $B_{\mathbb{R}^4}(w, D_l(z))$  ne croisera pas l'ensemble de Julia  $K_{2,c}$ . Puisque nous avons seulement la borne inférieure de la distance, le volume maximal de la boule qui ne croise pas  $K_{2,c}$  peut être supérieur. C'est pourquoi, lorsque nous suivons le rayon, nous avançons de la longueur  $D_l$  et de façon successive, nous réévaluons  $D_l$  pour progresser vers la fractale.



Soit  $\vec{v}$  un vecteur unitaire dans  $\mathbb{R}^4$  et  $\mu$  un point dans  $\mathbb{C}^2 \setminus K_{2,c}$ . Définissons

$$\{Z_{\mu,\vec{v},n}\} := \begin{cases} Z_{\mu,\vec{v},0} = \mu \\ Z_{\mu,\vec{v},n} = Z_{\mu,\vec{v},n-1} + D_l(Z_{\mu,\vec{v},n-1})\vec{v} \end{cases} \quad (6.1)$$

Par définition, aucun point dans  $K_{2,c}$  ne peut être membre de cette séquence. Si nous posons  $\mu$  comme l'oeil de projection et que nous utilisons  $\vec{v}$  comme l'orientation du rayon, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_{\mu,\vec{v},n} \quad (6.2)$$

est notre algorithme de ray-tracing. En termes simples, nous émettons un rayon de l'oeil vers l'objet. De façon itérative, nous faisons de petits bonds sur le rayon de longueur égale à la valeur de  $D_l$  aux points où les bonds atterrissent. Deux événements peuvent survenir, le rayon peut passer à côté de la fractale ou il peut converger vers elle i.e.

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_l(Z_{\mu,\vec{v},n}) = \infty \quad (6.3)$$

ou

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_l(Z_{\mu,\vec{v},n}) < \infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} D_l(Z_{\mu,\vec{v},n}) = 0. \quad (6.4)$$

Dans une procédure informatisée, nous utilisons l'approximation  $\hat{D}_l$  car nous ne possédons pas la fonction  $\phi$ , de la formule de potentiel, nécessaire pour calculer  $D_l$ . De plus, lorsque nous lançons un rayon, nous devons discerner si nous sommes dans le cas (6.3) ou (6.4). Nous allons définir  $\epsilon$  qui servira de critère d'arrêt pour notre rayon. Si  $|Z_{\mu,\vec{v},n}| < \epsilon$ , nous considérerons avoir atteint la fractale et que nous sommes dans le cas (6.4). Évidemment, plus  $\epsilon$  est petit, plus l'image de la fractale tracée sera près de la réalité. Si  $|Z_{\mu,\vec{v},n} - \mu|$  devient suffisamment grand et que nous

ne sommes pas dans le cas (6.4) nous assumons que la condition 6.3 est satisfaite. Une façon plus efficace de traiter ce cas est discutée dans la section 6.6.

Cette méthode nous permet de suivre les rayons dans  $\mathbb{R}^4$  et de discerner si nous approchons ou non de l'ensemble de Julia. En spécifiant un  $\epsilon$  suffisamment petit, il sera possible de s'approcher très près de la structure fractale à l'aide des rayons.

## 6.4 Ray-Tracing pour les coupes de $\mathcal{M}_2$ dans $\mathbb{R}^3$

A l'aide des résultats de la section précédente, nous allons maintenant voir comment visualiser les coupes des ensembles de Mandelbrot et Julia remplis généralisés dans  $\mathbb{R}^3$ .

Pour  $\mathcal{M}_2$ , nous ne possédons pas l'équivalent de  $\hat{D}_l$  pour  $D_l$ , mais des résultats expérimentaux dans [13] ont démontré que la formule de distance estimée pour les ensembles de Julia donne d'excellents résultats pour l'ensemble de Mandelbrot. Par contre, nous devons être prudents. À chaque intervalle sur le rayon, nous devons vérifier si nous sommes dans l'ensemble pour nous assurer que la formule ne donne pas une distance erronée. Cette vérification peut être exécutée à l'aide de l'algorithme d'échappement standard. À partir de ce fait, nous utilisons  $\hat{D}_l$  des ensembles de Julia pour le ray-tracing de  $\mathcal{M}_2$ .

Pour générer les images des coupes des ensembles de Julia et  $\mathcal{M}_2$ , comme le *Tétrabrot*, nous utiliserons

$$B_{\mathbb{R}^3}(w_0, r) = \{w \in \mathbb{R}^3 : |w - w_0| < r\} \text{ où } w_0 \in \mathbb{R}^3.$$

Évidemment,

$$B_{\mathbb{R}^3}(w, D_l(w)) \subset B_{\mathbb{R}^4}(z, D_l(w)).$$

Puisque nous calculons la distance dans  $\mathbb{R}^4$ , le rayon peut arrêter près de  $\mathcal{M}_2$ , mais loin de la coupe désirée. Pour avoir la certitude que nous générons une représentation fidèle de l'objet, il est nécessaire de prendre de petits  $\epsilon$ .

Par exemple, traçons un point du *Tétrabrot*. Soit  $p_t \in \mathcal{T}$ . Soit

$$Z_{\mu, \vec{v}, n_\epsilon} = (a_1, b_1, c_1, 0) \in Z_{\mu, \vec{v}, n}$$

le premier terme de  $Z_{\mu, \vec{v}, n}$  qui descend en dessous de  $\epsilon$ . Finalement, soit

$$p_e = (a_2, b_2, c_2, d_2) \in \mathcal{M}_2$$

le point de  $\mathcal{M}_2$  le plus près de  $Z_{\mu, \vec{v}, n_\epsilon}$  i.e.

$$\{p_e \in \mathcal{M}_2 : |Z_{\mu, \vec{v}, n_\epsilon} - p_e| = \min_{w \in \mathcal{M}_2} |Z_{\mu, \vec{v}, n_\epsilon} - w|\}$$

En considérant

$$\epsilon > |Z_{\mu, \vec{v}, n_\epsilon} - p_e| = |(a_1, b_1, c_1, 0) - (a_2, b_2, c_2, d_2)| \geq |d_2| \geq 0,$$

si  $\epsilon \rightarrow 0$  alors  $|d_2| \rightarrow 0$  et  $|p_e - p_t| \rightarrow 0$ , en assumant que  $Z_{\mu, \vec{v}, n}$  converge vers  $p_t$ . Ainsi nous sommes certains que nous générons bien l'image du *Tétrabrot*. Avec ce fait, nous pouvons utiliser le ray-tracing vu dans la section précédente pour les coupes de  $\mathcal{M}_2$  et des ensembles de Julia remplis sans aucune modification.

## 6.5 Effets visuels

Maintenant que nous pouvons créer des images de nos fractales, nous devons ajouter des effets visuels afin de percevoir les détails de la structure. En effet, par

l'ajout de lumière et d'ombre, il est possible de voir la texture des objets. De plus, en appliquant différentes couleurs aux points, nous pouvons obtenir beaucoup d'information sur l'ensemble tracé.

Pour l'application d'effets lumineux, les logiciels calculent la quantité de lumière reçue par le vecteur normal. Puisqu'il est impossible de trouver un vecteur normal à un point, nous allons le remplacer par une approximation du gradient. Cette méthode est présentée dans [4] et elle utilise les formules de distance. Notons qu'il existe d'autres façons d'approximer le gradient. Celle présentée ici donne les meilleurs résultats visuels pour le temps de calcul nécessaire. Si nous définissons le point tracé par  $w = (x,y,z)$  et le vecteur normal par  $N = (N_x, N_y, N_z)$  alors nous pouvons définir l'approximation du gradient comme suit:

$$\begin{aligned} N_x &= \hat{D}_l(x + \hat{D}_l(w), y, z) - \hat{D}_l(x - \hat{D}_l(w), y, z) \\ N_y &= \hat{D}_l(x, y + \hat{D}_l(w), z) - \hat{D}_l(x, y - \hat{D}_l(w), z) \\ N_z &= \hat{D}_l(x, y, z + \hat{D}_l(w)) - \hat{D}_l(x, y, z - \hat{D}_l(w)). \end{aligned}$$

Grâce à  $N$ , il est possible de calculer l'apport en lumière au point.

Pour ajouter de l'ombre, ou autrement dit, savoir si une source de lumière éclaire le point tracé, nous devons lancer un rayon du point jusqu'à la source lumineuse. Pour ce faire nous utilisons la même méthode de ray-tracing présentée dans la section précédente. Si notre source de lumière est au point  $L$  et le point tracé est  $w$  alors dans les équations (6.1)

$$\begin{aligned} \mu &= w \\ \vec{v} &= \frac{L - w}{|L - w|}. \end{aligned}$$

Aussi, il est nécessaire de prendre un epsilon inférieur à celui utilisé pour tracer

le point. En effet, la distance de la fractale à  $\mu$  est déjà inférieure à epsilon i.e.  $\hat{D}_l(\mu) < \epsilon$ . Donc, en posant l'epsilon comme étant  $\epsilon = \frac{\hat{D}_l(\mu)}{2}$  pour effectuer le ray-tracing du point à la lumière, ce problème est réglé.

De plus, pour les coupes de  $\mathcal{M}_2$ , nous pouvons attribuer différentes couleurs en utilisant la classification du théorème de Fatou-Julia généralisé démontré dans [20]. Si les points tracés  $w = w_1\mathbf{e}_1 + w_2\mathbf{e}_2$  possèdent une composante à l'intérieur de son ensemble respectif dans les nombres complexes,  $w_1$  ou  $w_2$ , ils seront colorés de façon différente. Cette méthode n'est pas artistique mais fournit de l'information spécifique sur le point tracé. En particulier, pour le *Tétrabrot*, dans le cas des points non-connexes mais pas totalement non-connexes, nous pouvons observer de petits ensembles de Mandelbrot tatoués sur la surface de  $\mathcal{T}$  (voir Fig 1, 4 et 6).

## 6.6 Optimisation

Il nous est possible d'optimiser le processus de ray-tracing en utilisant les propriétés mathématiques de l'ensemble généré. Dans le cas des ensembles de Mandelbrot et Julia remplis généralisés, nous savons qu'ils sont contenus dans une boule fermée. Nous allons nous servir de ce fait pour réduire le temps de calcul des images.

Il est démontré dans [18] et [20] que

$$\mathcal{M}_2 \subset \overline{B_{\mathbb{R}^4}(0,2)}$$

et

$$\mathcal{K}_{2,c} \subset \overline{B_{\mathbb{R}^4}(0, \max\{|c|, 2\})}$$

De plus, puisque nous considérons seulement les ensembles de Julia remplis généralisés connexes,  $c \in \mathcal{M}_2$  alors  $|c| < 2$ . Donc, tous nos ensembles sont contenus dans une boule fermée  $\overline{B_{\mathbb{R}^4}(0,2)}$  et les coupes dans  $\mathbb{R}^3$  sont contenues dans la boule fermée  $\overline{B_{\mathbb{R}^3}(0,2)}$ .

Si un rayon ne croise pas la sphère  $\partial\overline{B_{\mathbb{R}^3}(0,2)}$ , nous n'avons pas besoin de tracer le point associé. Si un rayon sort de la sphère, alors nous savons qu'il est impossible de croiser la fractale et nous sommes dans le cas (6.3). Grâce à cette propriété il est possible de réduire grandement le temps nécessaire pour produire les images des ensembles.

## 6.7 Exploration

Toutes les notions vues précédemment sont suffisantes pour générer des images des ensembles de Mandelbrot et de Julia remplis généralisés. Par contre, il faut à chaque fois se positionner dans l'espace pour obtenir des images différentes. Nous présentons ici une méthode d'exploration similaire à celle pour les fractales complexes. Cette procédure permet de sélectionner une partie de la fractale dans l'espace et d'avancer vers celle-ci pour obtenir plus de détails sur la région d'intérêt. Nous présentons seulement l'idée principale sans entrer dans les détails. Cette méthode fut testée avec grand succès dans un prototype, mais beaucoup de recherche sont encore nécessaires pour l'optimiser.

Tout d'abord, une première image de la fractale doit être générée en gardant en mémoire la longueur du plus court rayon tracé. L'image apparaîtra sur un écran noté  $S$  défini par quatre points coplanaires dans l'espace. Ce sont les coins de l'écran. Nous divisons  $S$  en pixels, en fonction de la résolution désirée pour notre

image. La position de l'oeil  $\mu$  sera fonction de la position et de la taille de  $S$ . De cette façon, lorsque nous déplacerons  $S$ ,  $\mu$  suivra.

Pour agrandir la zone d'intérêt, nous suivrons quelques étapes. Premièrement, nous devons recentrer la zone en effectuant une rotation avec  $\mu$  comme centre. Cette rotation s'explique, par analogie, comme étant la rotation de la tête du lecteur pour observer un des objets qui l'entourent.

Deuxièmement, nous redimensionnons  $S$  à la taille de la région d'intérêt. Cette étape changera potentiellement la position de  $\mu$ . Elle est nécessaire pour entrer dans les cavités extérieures de la fractale sans que l'écran  $S$  déborde à l'intérieur de celle-ci.

Finalement, nous avançons  $S$  vers la fractale en utilisant une fraction de la longueur du rayon le plus court. En s'approchant de la fractale, il est nécessaire de diminuer la taille du  $\epsilon$  pour garder un niveau de détail élevé. De cette façon, il est théoriquement possible d'avancer indéfiniment vers la fractale et de découvrir de nouvelles structures. En pratique, des erreurs numériques apparaissent lorsque l'exploration devient trop profonde.

# Chapitre 7

## Conclusion

### 7.1 Résumé

Dans la première section, une présentation des nombres bicomplexes a permis d'introduire le lecteur à l'algèbre de base de ce type de nombre. De plus, quelques résultats plus avancés en analyse furent fournis afin de permettre de développer la formule d'estimation de la distance bicomplexe.

La seconde section propose la première preuve rigoureuse et complète des bornes de la distance pour les fractales complexes. Ces formules sont la base des résultats pour les bornes de la distance pour les fractales dans les quaternions et dans les bicomplexes.

Par la suite, le résultat principal de ce document fut démontré: des formules pour borner la distance aux fractales bicomplexes. Ce résultat inédit est le pilier de la méthode pour générer, à l'aide du ray-tracing, des images des ensembles de Mandelbrot et Julia remplis généralisés présentés dans la dernière section.



Finalement, la borne inférieure de la distance fut appliquée à un algorithme spécial de ray-tracing pour générer les ensembles de Mandelbrot et Julia remplis généralisés. De plus, une façon d'explorer et d'agrandir les fractales en trois dimensions fut présentée.

## 7.2 Conclusion

Ce document a présenté de façon rigoureuse les nombres bicomplexes et les bornes de la distance, tant pour les nombres complexes que pour les nombres bicomplexes. L'objectif fut de ne laisser aucun doute sur la validité des résultats, mais de familiariser le lecteur aux nombres bicomplexes.

À l'aide du ray-tracing, il est facile de constater la beauté et la complexité des fractales bicomplexes. Il est souhaité que les images tirées de ces résultats sauront intéresser les profanes et les chercheurs sur l'algèbre, l'analyse et la dynamique complexe.

Ce travail n'était qu'un des trop peu nombreux ouvrages traitant de la dynamique bicomplexe, beaucoup de sujets restent encore à explorer. D'ailleurs, les formules données dans les pages précédentes se simplifieraient grandement si l'existence de l'application  $\phi$  était démontrée pour les bicomplexes. Aussi, la méthode d'exploration pourrait être étudiée dans les détails pour fournir une version plus optimale. Finalement, la majeure partie des résultats présentés dans ce mémoire pourraient, dans certains cas, se récupérer pour être utilisés avec d'autres types de nombres.

# Annexe A

**Théorème A.1** Soit  $f(z)$  et  $g(z)$  dont la décomposition en série de Taylor est la suivante (les rayons de convergence sont  $R$ ):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \text{ et } g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(z - z_0)^m.$$

Par définition, elles convergent uniformément et absolument dans  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r \text{ où } r < R\}$ . Montrons que

$$\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})g(z_0 + re^{i\theta})d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} (a_n b_m r e^{(n+m)i\theta}) d\theta.$$

**Preuve.** Premièrement, montrons que  $f(z)g(z)$  peut être vue comme une seule sommation  $h(z)$ . Puisque  $f(z)$  et  $g(z)$  convergent absolument

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \text{ et } \sum_{m=0}^{\infty} b_m(z - z_0)^m$$

convergent aussi absolument. Par le théorème 9 (p.85) dans [10], nous pouvons considérer

$$\begin{aligned} h(z) &= f(z)g(z) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \right) \left( \sum_{m=0}^{\infty} b_m(z - z_0)^m \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ a_n(z - z_0)^n \sum_{m=0}^{\infty} b_m(z - z_0)^m \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n b_m (z - z_0)^{n+m} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n,m} a_n b_m (z - z_0)^{n+m} = \sum_{l=0}^{\infty} c_l (z - z_0)^l.$$

Deuxièmement, montrons que  $h(z)$  converge uniformément sur  $C(z_0, r)$ . Du fait que

$$|a_n b_m (z - z_0)^{n+m}| = |a_n| r^n |b_m| r^m$$

alors, il suffit de montrer que

$$\sum_{n,m} |a_n b_m (z - z_0)^{n+m}|$$

converge, sur  $C(z_0, r)$ , afin d'utiliser le critère de Weierstrass [7] et prouver que la convergence est uniforme. Or,

$$\begin{aligned} \sum_{n,m} |a_n b_m (z - z_0)^{n+m}| &= \sum_{n,m} |a_n| r^n |b_m| r^m \\ &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \right) \left( \sum_{m=0}^{\infty} |b_m| r^m \right) \end{aligned}$$

converge par la première partie de la démonstration. Finalement, soit la somme partielle suivante:

$$h_k(z) = \sum_{l=0}^k c_l (z - z_0)^l.$$

En appliquant le changement de variable suivant  $z = z_0 + r e^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  alors  $z'(\theta) = i r e^{i\theta} = i(z - z_0)$  et

$$\sum_{l=0}^k \int_0^{2\pi} c_l r e^{li\theta} d\theta = \frac{1}{i} \int_{C(z_0, r)} \sum_{l=0}^k c_l (z - z_0)^{l-1} dz.$$

En utilisant la limite du côté gauche, nous obtenons:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^k \int_0^{2\pi} c_l r e^{li\theta} d\theta &= \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} c_l r e^{li\theta} d\theta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} (a_n b_m r e^{(n+m)i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

Du côté droit, selon le théorème 7 (p.210) dans [10], puisque la convergence est uniforme sur  $C(z_0, r)$ , nous pouvons interchanger la limite et l'intégrale, donc

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathbf{i}} \int_{C(z_0, r)} \sum_{l=0}^k c_l (z - z_0)^{l-1} dz &= \frac{1}{\mathbf{i}} \int_{C(z_0, r)} \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^k c_l (z - z_0)^{l-1} dz \\ &= \frac{1}{\mathbf{i}} \int_{C(z_0, r)} \sum_{l=0}^{\infty} c_l (z - z_0)^{l-1} dz = \int_0^{2\pi} h(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

□

# Annexe B

**Théorème B.1** Soit  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe sur l'ouvert  $U$ . Alors

$$|f'(z)| = ||f(z)||', \forall z \in U$$

où  $|f(z)| : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $f(z) = u(x,y) + \mathbf{i}v(x,y)$ .

**Preuve.** Soit

$$||f(z)||' = \sqrt{\left(\frac{\partial |f(z)|}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial |f(z)|}{\partial y}\right)^2}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \frac{\partial |f(z)|}{\partial x} &= \frac{\partial \sqrt{u(x,y)^2 + v(x,y)^2}}{\partial x} \\ &= \frac{1}{2} \left[ u(x,y)^2 + v(x,y)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \left[ \frac{\partial u(x,y)^2}{\partial x} + \frac{\partial v(x,y)^2}{\partial x} \right] \\ &= \frac{1}{2} |f(z)|^{-1} \left[ 2u(x,y) \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + 2v(x,y) \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \right] \\ &= |f(z)|^{-1} \left[ u(x,y) \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + v(x,y) \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial |f(z)|}{\partial y} = |f(z)|^{-1} \left[ u(x,y) \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + v(x,y) \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \right].$$

Puisque  $f(z)$  est analytique, par les équations de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial |f(z)|}{\partial y} = |f(z)|^{-1} \left[ -u(x,y) \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} + v(x,y) \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \right].$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|f(z)'\| &= \left[ |f(z)|^{-2} \left[ u(x,y)^2 \left( \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \right)^2 + v(x,y)^2 \left( \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \right)^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + u(x,y)^2 \left( \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \right)^2 + v(x,y)^2 \left( \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \right)^2 \right] \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= |f(z)|^{-1} [u(x,y)^2 |f(z)'|^2 + v(x,y)^2 |f(z)'|^2]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{|f(z)'| |f(z)|}{|f(z)|} = |f(z)'|.
\end{aligned}$$

□

**Corollaire B.2** Soit  $G(z) = \ln |\phi_c(z)|$ , nous pouvons considérer cette application comme étant de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Donc par le théorème B.1,

$$|G'(z)| = \left| \frac{\phi_c'(z)}{\phi_c(z)} \right|.$$

**Preuve.** Puisque

$$G(z) = \ln |\phi_c(z)| = \ln \sqrt{\operatorname{Re}(\phi_c(z))^2 + \operatorname{Im}(\phi_c(z))^2}$$

et

$$\begin{aligned}
G'(z) &= \left( \frac{\partial \ln |\phi_c(z)|}{\partial x}, \frac{\partial \ln |\phi_c(z)|}{\partial y} \right) \\
&= \frac{1}{|\phi_c(z)|} \left( \frac{\partial |\phi_c(z)|}{\partial x}, \frac{\partial |\phi_c(z)|}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

alors

$$|G'(z)| = \frac{|\phi_c(z)'|}{|\phi_c(z)|} = \left| \frac{\phi_c'(z)}{\phi_c(z)} \right|$$

par le théorème B.1. □

**Corollaire B.3** Soit  $G(z)$ , le potentiel au point  $z$ . Ce potentiel peut être approximé par

$$|G'(z)| \approx \frac{|z_n'|}{2^n |z_n|}.$$

**Preuve.** Posons  $z_n = f_c^n(z_0)$  avec  $z_0 := z$  et  $z'_n := \frac{d}{dz}[f_c^{o n}(z)]|_{z=z_0}$ . Par la définition du potentiel 4.5.1,

$$\begin{aligned}
 |G'(z)| &\approx \left| \left( \frac{\ln |z_n|}{2^n} \right)' \right| \\
 &= \left| \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\ln |z_n(x,y)|}{2^n}, \frac{\partial}{\partial y} \frac{\ln |z_n(x,y)|}{2^n} \right) \right| \\
 &= \frac{1}{2^n |z_n(x,y)|} \left| \left( \frac{\partial |z_n(x,y)|}{\partial x}, \frac{\partial |z_n(x,y)|}{\partial y} \right) \right| \\
 &= \frac{||z_n||'}{2^n |z_n|} \\
 &= \frac{|z'_n|}{2^n |z_n|}
 \end{aligned}$$

par le théorème B.1.  $\square$

# Bibliographie

- [1] V. Avaniessian, (1985), *Cellule d'harmonicité et prolongement analytique complexe*, Paris, Hermann.
- [2] A. F. Beardon, (1991), *Iteration of rational functions*, New York, Springer-Verlag.
- [3] L. Carleson and T. W. Gamelin, (1993), *Complex Dynamics*, New York, Springer-Verlag.
- [4] Y. Dang, L. H. Kaufman and D. Sandin, (2002), *Hypercomplex Iteration Distance Estimation and Higher Dimensional Fractals*, Singapore, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- [5] A. Douady and J. H. Hubbard, (1982), Itération des polyn mes quadratiques complexes, *C.R. Acad. Sc. Paris*, 294, 123-126 .
- [6] P. L. Duren, (1983), *Univalent Functions*, New York, Ed. Springer-Verlag.
- [7] F. J. Flanigan, (1983), *Complex Variables: Harmonic and Analytic Functions*, New York, Dover.
- [8] A. Glassner, (1989), *An Introduction to ray tracing*, London, Academic Press.
- [9] J. C. Hart, D. J. Sandin and L. H. Kauffman, (1989), Ray Tracing Deterministic 3-D Fractals, *Computer Graphics*, 23, 289-296.
- [10] K. Knopp, (1956), *Infinite sequences and series*, New York, Dover publication.



- [11] É. Martineau, D. Rochon, (à paraître), On a Bicomplex Distance Estimation for the Tetrabrot, *International Journal of Bifurcation and Chaos*.
- [12] A. Norton, (1982), Generation and Display of Geometric Fractals in 3-D, *Computer Graphics*, 16, 61-67.
- [13] H.-O Peitgen and S. Dietmar, (1988), *The science of fractal images*, New York, Springer-Verlag.
- [14] H.-O. Peitgen, H. Jürgens and D. Saupe, (1992), *Chaos and Fractals New Frontiers of Science*, New York, Springer-Verlag, 793-794.
- [15] H.-O. Peitgen and P.H. Richter, (1986), *The Beauty of Fractals Images of Complex Dynamical Systems*, Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, 56-57.
- [16] G. B. Price, (1991), *An Introduction to Multicomplex Spaces and Functions*, New York, Marcel Dekker Inc.
- [17] D. Rochon, (1997), *Sur une généralisation des nombres complexes: les tétranombres*, M. Sc. Université de Montréal.
- [18] D. Rochon, (2000), A Generalized Mandelbrot Set For Bicomplex Numbers, *Fractals*, 8(4), 355-368.
- [19] D. Rochon, (2001), A Bloch Constant for Hyperholomorphic Functions, *Complex Variables*, 44, 85-101.
- [20] D. Rochon, (2003), On a Generalized Fatou-Julia Theorem, *Fractals*, 11(3), 213-219.
- [21] D. Rochon, M. Shapiro, (à paraître), On algebraic properties of bicomplex and hyperbolic numbers , *Anal. Univ. Oradea*.
- [22] W. Rudin, (1976) *Principles of Mathematical Analysis 3d ed.*, 32-46, New York, McGraw-Hill.
- [23] J. Ryan, (1982), Complexified Clifford Analysis, *Complex Variables*, 1, 119-149.

- [24] C. Segre, (1892), Le Rappresentazioni Reali delle Forme Complesse a Gli Enti Iperalgebrici, *Math. Ann.*, 40, 413-467.
- [25] B. V. Shabat, (1992), *Introduction to Complex Analysis part II: Functions of Several Variables*, American Mathematical Society.
- [26] M. R. Spiegel, (1973), *Variables Complexes*, New York, McGraw-Hill.